

5/11/08

5. חוקי קפלר - חוקי ניוטון - גרביטציה

De Revolutionibus

פילוסופיה - ספרו של קופרניקוס (1543)

1571-1630 קפלר

Principia Mathematica (1687) 1643-1727 ניוטון

בספר זה מפרק ניוטון את חוקי קפלר ואת חוקי כביכול (החוק השני וחוק השלישי האנליטי)

אולי ~ 1750 הפיק צ'ארלס בארנס אנליטי

חוקי קפלר

אנדרס היקל גרף מרדכי

(1) הוויזואציה של גרביטציה המכילה את האלמנטים במערכת השמש.

כאשר השמש - באחד המקצבים

2) הקצב הממוצע של גרביטציה ובלוויזואציה של גרביטציה

(3) חוקי המצוי סטטיסטיקה לקבלת האורקל של הקצב הרגיל של האלמנטים.

חוקי ניוטון - גרביטציה

$\vec{F} = m \vec{a}$ (החוק השני של ניוטון)

$$\vec{F} = -G \frac{m M}{R^2} \vec{R} \quad (\text{החוק האנליטי})$$

$$-G \frac{m M}{R^2} \vec{R} = m \vec{a}$$

$\Downarrow$

$$\vec{a} = -G \frac{M}{R^2} \vec{R}$$

$$R = |\vec{R}|$$

(שלוש בין החוקים)

$$\vec{R} \times \vec{a} = 0$$

לכן

$$\vec{R} \parallel \vec{a}$$

בפרט

$$\vec{V} = (\vec{R})'$$

$$\frac{d}{dt} (\vec{R} \times \vec{V}) = \vec{R}' \cdot \vec{V} + \vec{R} \cdot \vec{V}' = \vec{V} \cdot \vec{V} + \vec{R} \cdot \vec{a} = 0 + 0 = 0$$

$$\text{לכן } \vec{R} \times \vec{V} = \vec{h}$$

הוקדשנו כי המומנט $\vec{h}$ הוא קבוע (משפט נוסף) ונרשום $\vec{h} = R^2 \vec{\omega}$

$$\begin{aligned} \vec{h} &= \vec{R} \times \vec{V} = \vec{R} \times \vec{R}' = (R \vec{u}) \times (R \vec{u})' = R \vec{u} \times (R' \vec{u} + R \vec{u}') \\ &= R R' \underbrace{\vec{u} \times \vec{u}}_0 + R^2 (\vec{u} \times \vec{u}') = R^2 (\vec{u} \times \vec{u}') \end{aligned}$$

$\vec{u}$ וקטור יחידה בכיוון $\vec{R}$

$$\vec{a} \times \vec{h}$$

כאן נשתמש בזה

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{h} &= -\frac{GM}{R^2} \vec{u} \times R^2 (\vec{u} \times \vec{u}') = -GM \vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{u}') \\ &= -GM [(\vec{u} \cdot \vec{u}') \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{u}) \vec{u}'] = GM \vec{u}' \end{aligned}$$

$$\vec{V} \times \vec{h} = GM (\vec{u} \cdot \vec{q})$$

$\vec{q}$ וקטור קבוע של המסה M

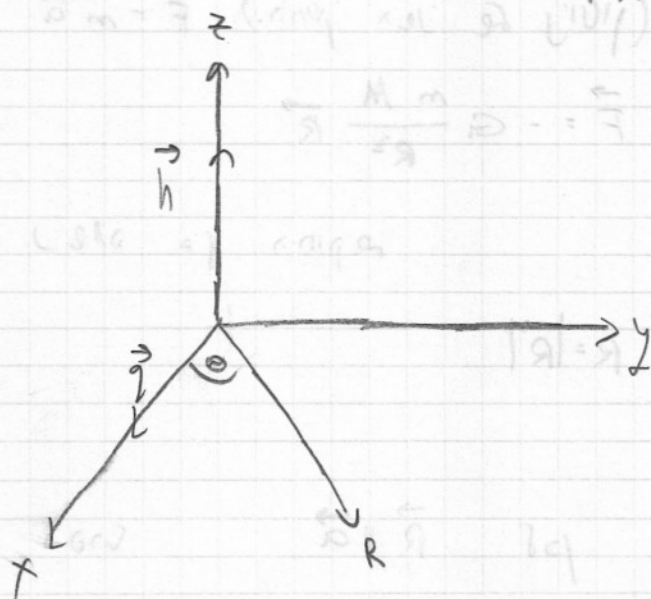
$$\vec{q} = \frac{1}{GM} \vec{V} \times \vec{h} - \vec{u}$$

$$\vec{q} \perp \vec{h}$$

כל

נראה כי $\vec{q}$ הוא וקטור קבוע במערכת הקואורדינטות (x, y, z)

$\vec{q}$ יחידה $\perp$ $\vec{h}$



$$\begin{aligned}\vec{R} \cdot (\vec{v} \times \vec{h}) &= \vec{R} (GM\vec{u} + \vec{q}) = GM\vec{R} \cdot \vec{u} + \vec{R} \cdot \vec{q} \\ &= GM R \vec{u} \cdot \vec{u} + R q \cos \theta \\ &= R (GM + q \cos \theta)\end{aligned}$$

$$q = 191$$

$$\vec{R} (\vec{v} \times \vec{h}) = (\vec{R} \times \vec{v}) \cdot \vec{h} = \vec{h} \cdot \vec{h} = h^2$$

$$q = 33N$$

$$|\vec{h}| = h$$

$$h^2 = R (GM + q \cos \theta)$$

$$R = \frac{h^2}{GM + q \cos \theta} = \frac{h^2 / GM}{1 + \frac{q}{GM} \cos \theta}$$

$$\text{סדר} \quad e = \frac{q}{GM} \quad \text{מוי}$$

$$R = \frac{eh^2/q}{1 + e \cos \theta} = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}$$

$$ed = \frac{eh^2}{q}$$

$$d = \frac{h^2}{q}$$

כיוון שההסתברות (probability) היא $e < 1$ ויש לה סדר

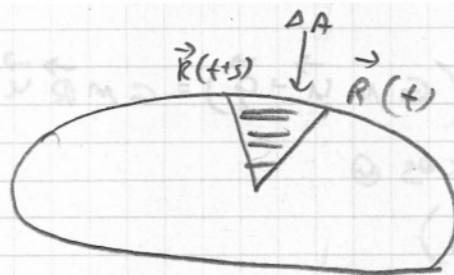
סדר זה נקרא סדר הסינוס (sinusoidal order)

$$R(t) = i R \cos \theta + j R \sin \theta$$

כיוון

$$\text{וכן} \quad R'(t) = i(R' \cos \theta - R \sin \theta \theta') + j(R' \sin \theta + R \cos \theta \theta')$$

$$\vec{h} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ R \cos \theta & R \sin \theta & 0 \\ () & () & 0 \end{vmatrix} = R^2 \theta' \vec{k}$$



$$\frac{dA}{dt}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A(t+s) - A(t)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{s}$$

$$\frac{\Delta A}{s} \approx \frac{1}{2s} R(t) R(t+s) \sin \theta(s) = \frac{1}{2} R(t) R(t+s) \frac{\sin \theta(s)}{\theta(s)} \cdot \frac{\theta(s)}{s}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} R(t)^2 \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{2} R^2 \theta' = \frac{1}{2} h = \text{const}$$

$$A'(t) = \frac{1}{2} h$$

$$\Rightarrow A(t) = \frac{1}{2} ht + c$$

$$A(0) = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$A(t) = \frac{1}{2} ht$$

$$\frac{1}{2} ht = \text{Area} = \pi a b$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi ab}{h}$$

$$ed = \frac{h^2}{GM}$$

(מהנסיחה שקיבלנו בקואורדינטות קוטביות נגזרת המשוואה)

$$ed = \frac{b^2}{a}$$

כאן נן מניחים שהאליפסה היא מעגל

$$\frac{h^2}{GM} = \frac{b^2}{a}$$

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{a^2 b^2}{h^2} = 4\pi^2 \frac{a^2 b^2}{GM \frac{b^2}{a}} = \frac{4\pi^2}{GM} a^3$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3$$

המרחב R^n, R^m של מרחבים וקטוריים

$$L(R^n, R^m) = \text{Hom}(R^n, R^m)$$

הרכיבים R^n ו- R^m

$$\text{Hom}(R^n, R^m) \cong T$$

כאן T

$$|Tx| < \varepsilon \iff |x| < \delta$$

דוגמה: $\varepsilon < \delta$ קיים δ כך ש-

$$\text{Hom}(R^n, R^m)$$

הכרחי: נגדיר נורמה על

$$|T| = \sup_{x \neq 0} \frac{|Tx|}{|x|} = \sup_{|x|=1} |Tx| = \sup_{|x| \leq 1} |Tx|$$

לדוגמה: T דוגמה של מרחב וקטוריים

הכרחי: R הוא מרחב וקטוריים

במרחב $\{e_i\}$ של R מרחב וקטוריים

לדוגמה: $\{e_i\}$ וקטוריים של R

$$l(x) =$$

מקדם x בסדרה

$$l\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad l\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{9}{2} \quad l(11) = 0 \quad l\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q} \rightarrow \pi \neq l(\pi) = 0$$

הוכחה: נגדיר תחילה T כמרחב וקטוריים

באמצעות $\varepsilon = 1$ קיים δ כך ש-

$$T(B_\delta(0)) \subset B_1(0)$$

$$|x| = 1 \quad x \in R^n$$

מקדם

$$|T(\delta x)| = |\delta Tx| \leq \delta$$

$$|Tx| < \delta$$

כאן x

$$(x) \quad |T| < \delta$$

□

כיוון ש: $|T|$ נגזרת $|T|$ נראה כי T רציפה
 $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$$|Tx - Ty| = |T(x-y)| \leq |T| |x-y|$$

$$|T| = \sup \frac{|Tx|}{|x|}$$

$$|Tx| \leq |T| |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

מרחב בנק

התקנה: מרחב נקטני $\mathbb{R}$ (או $\mathbb{C}$) מכיל קבוצה $\|\cdot\|$
 (שהיא בעצמה מרחב נקטני)

נדרוש גם כי מרחב נקטני יהיה מרחב שם
 כלומר כל סדרת קושי מתכנסת.

במילים אחרות: $\{x_n\}$ סדרה של איברי המרחב

כך שפיט סדרת קושי כלומר לכל $\epsilon > 0$ קיים N

כך שלכל $n, m > N$ מתקיים $\|x_n - x_m\| < \epsilon$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

נכונות כי $x_n \rightarrow x$ או

במרחב נקטני

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - x_n\| = 0$$

משפט: מרחב נקטני מלא הוא מרחב בנק

פירוש: כל נקודה $\|\cdot\|$ ו- $\|\cdot\|$ נקודה שקולה

אם $\epsilon > 0$ δ, ϵ כך ש-

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|x\| \leq \delta \Rightarrow \|x\| \leq \epsilon$$

משפט: כל מרחב נקטני מלא הוא מרחב שם שקול

במרחב $\mathbb{R}^n$ כל אגף n יכולת הפיכה היא נקודה

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

לפי