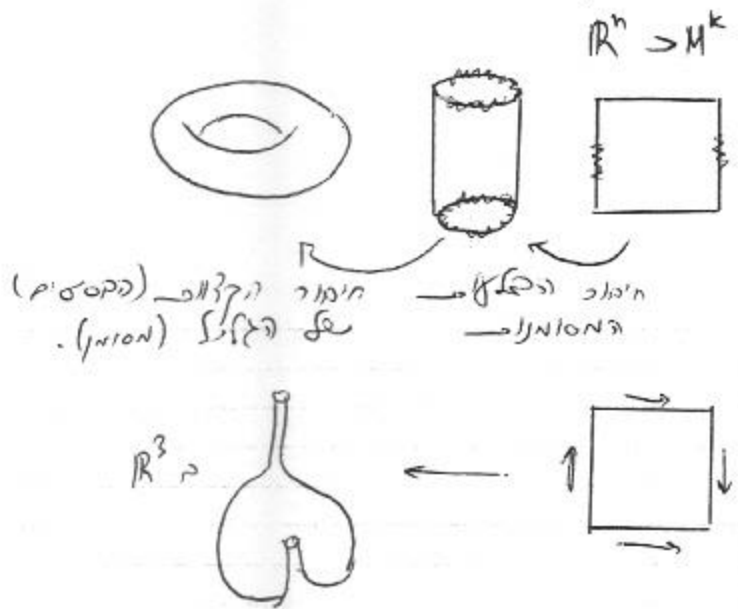


6. השאלה השנייה



$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$$

$$C^1 - f \quad \mathbb{R}^n \xleftarrow{f} \text{ open } U$$

$$f(a, b) = 0 \quad \text{open } U \ni (a, b)$$

$$(Df)_{(a,b)}^1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(Df)_{(a,b)}^1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a,b) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a,b) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a,b) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(a,b) \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

השאלה השנייה:  $g \in C^1(W, \mathbb{R}^n)$  ו- $C^1$  -  $\mathbb{R}^m$   $\rightarrow$   $\mathbb{R}^n$   $h$   $\in$   $W$   $\rightarrow$   $g(h) = a$

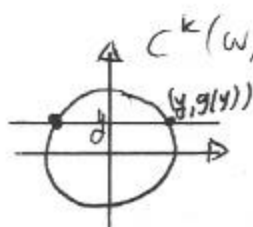
2.  $(W \ni y \text{ s.t. } \exists (g(y), y) \text{ s.t. } f(g(y), y) = 0)$

$$(Dg)_y = -((Df)_{(g(y), y)}^1)^{-1} \circ (Df)_{(g(y), y)}^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (Df)_{(g(y), y)}^2$$

$$g: W \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(Dg)_y : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$



השאלה השנייה:  $C^k(W, \mathbb{R}^n) \ni g$   $k \geq 1$   $C^k(U, \mathbb{R}^n) \ni f$   $k \geq 1$

$$h = u = 1 \quad f(x, y) \quad x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$$

$$f(g(y), y) = 0$$

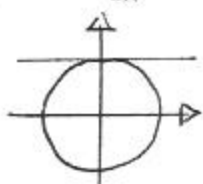
$$x^2 = 1 - y^2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{1 - y^2} = g(y)$$

$$g'(y) = \frac{1}{2} (1-y^2)^{-\frac{1}{2}} 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

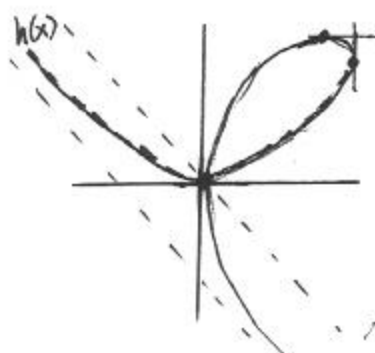
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 2\sqrt{1-y^2}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2\sqrt{1-y^2}} 2y$$



התנגדויות — ה'א בקורס 1

2 EN13



$$x^3 + y^3 - 3xy = 0$$

(\*) (הצגה גורמת) —

3 נקודות

$$f(x, h(x)) = 0$$

(\*) הפונקציה — מכונה  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$  — נקראות נגזרות חלקיות. כלומר: האפשרות לא הפוך — האלו של ה-  $\frac{\partial f}{\partial x}$  ו-  $\frac{\partial f}{\partial y}$  הם

3 EN13

$$f(x_1, x_2) = (x_1^3 + x_2^3, x_1^2 + x_2^2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)) = (y_1, y_2)$$

$$m=n=2$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$a = (1, 2)$$

$$b = (4, 5)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1^2 & 3x_2^2 \\ 2x_1 & 2x_2 \end{pmatrix} = (Df)_{(x_1, x_2)}$$

$$\det (Df)_{(1,2)} = \det \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = -12 \neq 0$$

הפונקציה הפורמלית  $f \circ g = id_W$  :  $a$  ב-  $\mathbb{R}^2$  נקרא  $(4, 5)$   $\in W$  מסומנת

4 EN13

$$f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad n=m=2$$

$$f(x_1, x_2, y_1, y_2) = (y_1^3 + y_2^3 - x_1^2 - x_2^2, y_1^2 - y_2^2 - x_1^3 - x_2^3) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$$

$$(a, b) = (1, -1, 1, 1)$$

נקודה

$$f(a, b) = (0, 0)$$

$$(Df)_{(a,b)}^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \end{pmatrix}_{(a,b)} = \begin{pmatrix} -2x_1 & -2x_2 & 3y_1^2 & 3y_2^2 \\ -3x_1^2 & -3x_2^2 & 2y_1 & -2y_2 \end{pmatrix}_{(a,b)} = T_{(a,b)}$$

$$\det \begin{pmatrix} -2x_1 & -2x_2 & 3y_1^2 & 3y_2^2 \\ -3x_1^2 & -3x_2^2 & 2y_1 & -2y_2 \end{pmatrix}_{(a,b)} = 6(x_1 x_2^2 - x_2 x_1^2) = 6(1 - (-1)) = 12 \neq 0$$

לפי משפט הפונקציה הפורמלית  $f(x, y) = 0$  קיים פתרון  $g: W \rightarrow \mathbb{R}^2$  כזה ש-  $(1, 1) = b \in W$

$$\forall y \in W \quad f(g(y), y) = 0 \quad \text{התנאי}$$

הוכחה - משפט השקיפות

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \supset U \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$$

$$(F(a,b) = (0, b))$$

$$F(x,y) = (f(x,y), y) \quad \text{כאשר } f \text{ פונקציה סקלרית}$$

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \supset U \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

$$DF = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (Df)^1 & (Df)^2 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

$$(DF)_{(a,b)}^{-1}(x) = (Df)_{(a,b)}^{-1}(x) \quad \text{המשפט}$$

$$(DF)^1_{(a,b)} \quad \text{הפונקציה } (DF)^1_{(a,b)}$$

$$(DF)_{(a,b)} \quad \text{הפונקציה } (DF)_{(a,b)}$$

$$\text{הפונקציה } (DF)_{(a,b)} \text{ היא הפונקציה } (DF)_{(a,b)}$$

$$\mathbb{R}^{n+m} \supset \tilde{U} \ni (a,b) \quad \text{הפונקציה } (DF)_{(a,b)}$$

$$\mathbb{R}^{n+m} \supset \tilde{V} = F(\tilde{U})$$

$$\phi(0,b) = (a,b) \quad \text{הפונקציה } \phi: \tilde{V} \rightarrow \tilde{U}$$

$$Id_{\tilde{V}} = F \circ \phi: \tilde{V} \rightarrow \tilde{V}$$

$$\phi(z,\eta) = (\varphi(z,\eta), \lambda(z,\eta)) \quad \text{הפונקציה } \phi$$

$$(z,\eta) = F \circ \phi(z,\eta) = F(\varphi(z,\eta), \lambda(z,\eta)) = (f(\varphi(z,\eta), \lambda(z,\eta)), \lambda(z,\eta)) \text{ שם } \lambda(z,\eta) = \eta$$

$$z = f(\varphi(z,\eta), \eta) \quad \forall (z,\eta) \in \tilde{V} \quad \text{הפונקציה } \phi$$

$$W = \tilde{V} \cap (z_0 \times \mathbb{R}^m) = \{ \eta : (0,\eta) \in \tilde{V} \} \quad \text{הפונקציה } \phi$$

$$y \in W \text{ לכל } y \in W \text{ שם } g(y) = \varphi(0,y)$$

$$f(g(y), y) = f(\varphi(0,y), y) = 0$$

$$C^1(W, \mathbb{R}^n) \ni g \text{ פונקציה } C^1 \text{ היא } g$$

$$(a,b) = \phi(0,b) = (\varphi(0,b), b) = (g(b), b)$$

$$a = g(b) \quad \leftarrow$$

$$\text{הפונקציה } g \text{ היא הפונקציה } g$$

$$f(x,y) = f(x',y) \quad \text{הפונקציה } f$$

$$F(x,y) = (f(x,y), y) = (f(x',y), y) = F(x',y)$$

$$x' = x \quad \text{הפונקציה } F$$

$$g(y) = g_1(y) \quad \text{הפונקציה } g$$