3/11/08

ספרות

- חשבון אינפיניטסימלי מתקדם חלקים א, ב
- יורם לינדנשטראוס (הוצאת אקדמון)

שיעור I - מסלולים ב-R^n - חוקי קפלר

1. המכפלה הפנימית $x,y \in R^n$

$$x,y = (x\cdot y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

תכונות: (i) $y\cdot x = x\cdot y$ סימטריה

(ii) B-לינאריות $(x+y)\cdot z = x\cdot z + y\cdot z$

$\alpha(x\cdot y) = (\alpha\cdot x)\cdot y$

(iii) $x^2 = x\cdot x = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$ $\quad x=0 \Leftrightarrow 0 = x\cdot x$

נגדיר $x\cdot x = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = |x|^2$

$|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ הנורמה של של x

מתקיים אי-שוויון קושי-שוורץ $|x\cdot y| \leq |x||y|$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

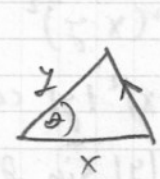
$$-1 \leq \frac{|x\cdot y|}{|x||y|} \leq 1$$

קיים אלפא מספר יחיד $0 \leq \theta \leq \pi$ כך ש $\cos\theta = \frac{|x\cdot y|}{|x||y|}$

$\theta = (x,y)$ * זה הזווית בין הוקטורים x ו y.

$\|x-y\|^2 = (x-y)(x-y)$ $\quad |x|^2 + |y|^2 - 2x\cdot y$

$|x|^2 + |y|^2 + 2|x||y|\cos\theta$



<u>הגדרה:</u> x ניצב ל-y $(x \perp y)$ כאשר $\theta = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$ כלומר $x\cdot y = 0$

בסיס ל-$\mathbb{R}^n$ נקרא בסיס <u>אורתונורמלי</u> אם איברי הבסיס

$\{f_i\}_{i=1}^n$ מקיימים $f_i\cdot f_j=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$

דוגמא: הבסיס הקנוני $e_j=(0,0,\dots,\underset{\substack{\downarrow\\ j}}{1},0\dots0)$

מטריצה $n\times n$ A נקראת אורתוגונלית אם $x\cdot y=Ax\cdot Ay$

לכל $x,y\in\mathbb{R}^n$.

לכל שני בסיסים אורתונורמלים $\{f_i\}_{i=1}^n,\{g_i\}_{i=1}^n$

יש מטריצה אורתוגונלית A כך ש- $Af_i=g_i$ $(1\le i\le n)$

2. ב-$\mathbb{R}^3$ אפשר להגדיר מכפלה וקטורית

<u>הגדרה</u>: עבור $x=(x_1,x_2,x_3)$, $y=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$

נגדיר וקטור $x*y$

$$x*y=(x_2y_3-y_2x_3,\ x_3y_1-x_1y_3,\ x_1y_2-x_2y_1)$$

$$=\begin{vmatrix} i & j & k\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix}\qquad \begin{aligned} i&=(1,0,0)\\ j&=(0,1,0)\\ k&=(0,0,1)\end{aligned}$$

תכונות:

i) $x*y=-y*x$

ii) B לינארית. $x*(y+z)=x*y+x*z$

$(\alpha x)*y=\alpha(x*y)$

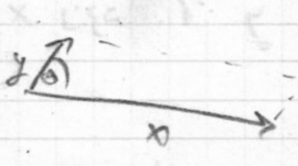
טענה: $x*y$ ניצב ל-x וגם ל-y

$$x\cdot(x*y)=\det\begin{pmatrix}x\\x\\y\end{pmatrix}=0$$

$$\|x*y\|^2=\|x\|^2\|y\|^2-(x\cdot y)^2$$

$$=|x|^2|y|^2-|x|^2|y|^2\cos^2\theta=|x|^2|y|^2\sin^2\theta$$

$$|x*y|=|x||y|\sin\theta$$



$x\times y$ היא אפוא וקטור הניצב ל-x ול-y

ואורכו $|x||y|\sin\theta$

אם $|x|=|y|=1$ ו- $x\perp y$ אז $|x\times y|=1$

ולכן $\{x, y, x\times y\}$ בסיס אורתונורמלי

ל- $\mathbb{R}^3$.

אם $\{x, y, -(x\times y)\}$ בסיס אורתונורמלי ל- $\mathbb{R}^3$

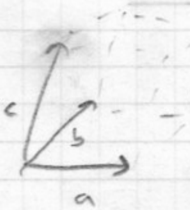
נקרא ל- $\{x, y, x\times y\}$ בסיס ימני

$\{i,j,k\}$ שלשה ימנית

המכפלה המשולשת: $a\cdot(b\times c)=\det\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$

מסקנה: $a\cdot(b\times c)=(a\times b)\cdot c$

תרגיל: $a\times(b\times c)=(a\cdot c)b-(a\cdot b)c$



$a\cdot(b\times c)$ = נפח המקבילון

3. מסלול ב- $\mathbb{R}^n$

<u>הגדרה</u>: מסילה היא העתקה רציפה

$\gamma:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^n$

אם $\delta:[c,d]\to\mathbb{R}^n$

וקיימת העתקה רציפה $\varphi:[a,b]\to[c,d]$;

$\varphi(a)=c,\ \varphi(b)=d$

מונוטונית ממש כך ש- $\gamma=\delta\circ\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}^n$

נאמר כי המסילות γ ו- δ שקולות

<u>תרגיל</u>: זהו יחס שקילות.

נאמר: כי γ מסילה <u>פשוטה</u> אם היא חח"ע

ו<u>סגורה</u> אם $\gamma(a)=\gamma(b)$

סגורה פשוטה אם שוויון זה הוא המכשול היחיד לחח"ע

דוגמאות:

$t \to (\cos t2\pi, \sin t2\pi)$

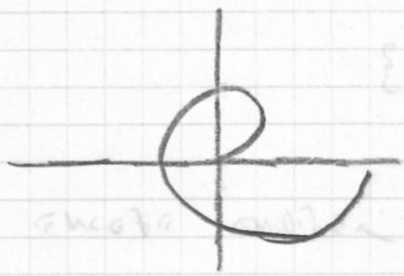
$[0,1] \to R^2$

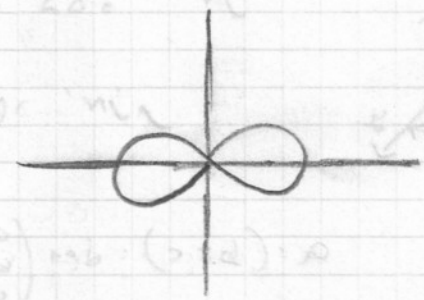
סגורה ופשוטה

$[0, 2\pi] \to R^2$

$t \mapsto (\sin t, \cos t)$

$t \mapsto (t\cos t, t\sin t)$





<u>הגדרה:</u> למסילה $\gamma : [a,b] \to R^n$

יש נגזרת בנקודה $t \in [a,b]$ אם קיים

הגבול $\lim_{s \to 0} \frac{\gamma(t+s) - \gamma(t)}{s} = \gamma'(t)$

אם $\gamma'(t)$ קיימת בכל נקודה נאמר כי γ גזירה

רגולרית אם בנוסף $\gamma'(t) \neq 0$ לכל t אז γ

נקראת חלקה.

הגדרה: נגדיר

$$\ell(\gamma) = \sup\left\{ \sum d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) : \text{חלוקות מסוימות של } [a,b] \right\}$$

$$d(x,y) = |x-y|$$

d מקיימת תכונות של מטריקה כלומר

(i) $d(x,y) = d(y,x)$

(ii) $d(x,y) \geq 0$ וקיים שוויון $\Leftrightarrow x=y$

(iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

הזוג $(\mathbb{R}^n, d)$ הוא אפוא מרחב מטרי:

אם $\ell(\gamma) < \infty$ המסילה היא בעלת אורך $(\ell(\gamma))$

תרגיל: תנו דוגמא של מסילה שאין לה אורך

פיאנו (PIANO) הראה שקיימת מסילה

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$$

$$\{\gamma(t) : t \in [0,1]\} = \text{range}(\gamma) = [0,1] \times [0,1]$$

משפט: שתי מסילות שקולות הן בעלות אותו אורך

תרגיל: $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$

אמ"מ לכל j, γ_j בעלת השתנות חסומה.

משפט: מסילה גזירה ברציפות על (קטע קומפקטי)

הינה בעלת אורך.

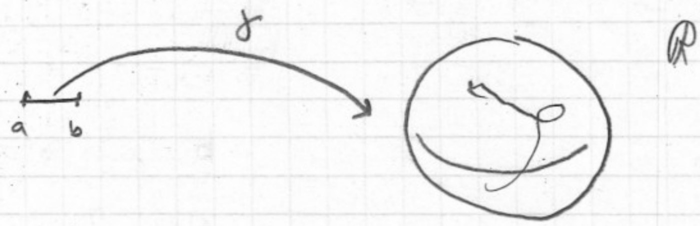
הוכחה: לכל קואורדינטה יש נגזרת חסומה ולכן

מקיימת את תנאי ליפשיץ ולכן בעלת השתנות חסומה. $\blacksquare$

תרגיל: אם γ ו-δ מסילות $[a,b] \to \mathbb{R}^n$ שהן

גזירות אז (i) $(\gamma \cdot \delta)' = \gamma'\delta + \gamma\delta'$

(ii) ב-$\mathbb{R}^3$ קיים גם $(\gamma \times \delta)' = \gamma' \times \delta + \gamma \times \delta'$



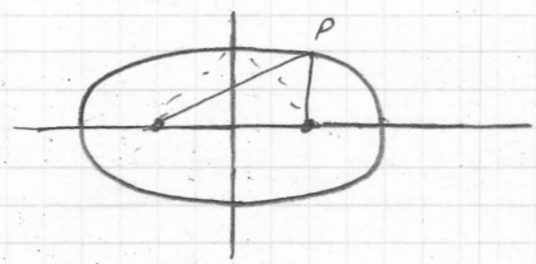
טענה: אם γ נגזרת ברציפות ו- $|\gamma(t)| = const = R$ אז
$\gamma'(t) \perp \gamma(t)$

הוכחה:
$$0 = (R^2)' = (\gamma(t)\cdot\gamma(t))' = 2\gamma'(t)\gamma(t)$$

4. חתכי חרוט

אליפסה: יהיו $0<a$ $0<c$ אוסף הנקודות במישור
כך ש- $|PF_1|+|PF_2| = 2a$
כאשר F_1, F_2 נקודות במישור $F_1 = (-c,0)$ $F_2 = (c,0)$

$a^2 - c^2 = b^2 > 0$



תרגיל: אוסף הנקודות הוא: $\left\{(x,y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$

משפט: תהי F נקודה במישור, ℓ ישר שאינו מכיל את F ויהי $e>0$
אוסף הנקודות במישור P המקיימות את המשוואה
$$\frac{|P\cdot F|}{|P\cdot \ell|} = e$$

הוא חתך חרוט:
i) אליפסה אם $e<1$
פרבולה אם $e=1$
היפרבולה אם $e>1$

הוכחה: (חלקית) נבחר מערכת קואורדינטות קרטזית כך

$F=(0,0)$ ו-l היא הישר $x=d>0$

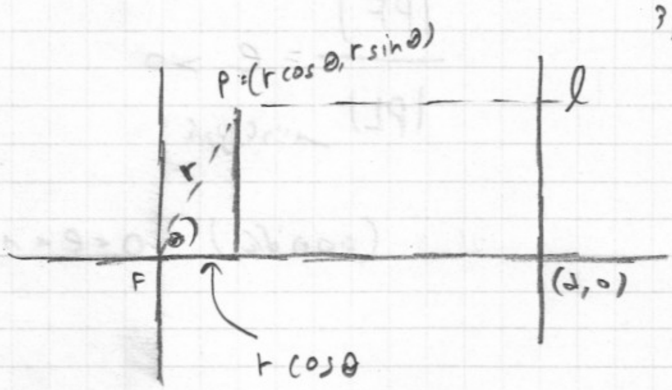
תהי P נקודה בעלת קואורדינטות קוטביות (r,θ)

אזי P מקיימת את הדרישה אמ"מ

$$|PF|=r \qquad |Pl|=d-r\cos\theta$$

$$r=\frac{ed}{1+e\cos\theta} \qquad r=e(d-r\cos\theta)$$

l	F	e
directrix	Focus	האקסצנטריות
קו	מוקד	



ע"י העלאה בריבוע ומעבר לקואורדינטות קרטזיות נקבל

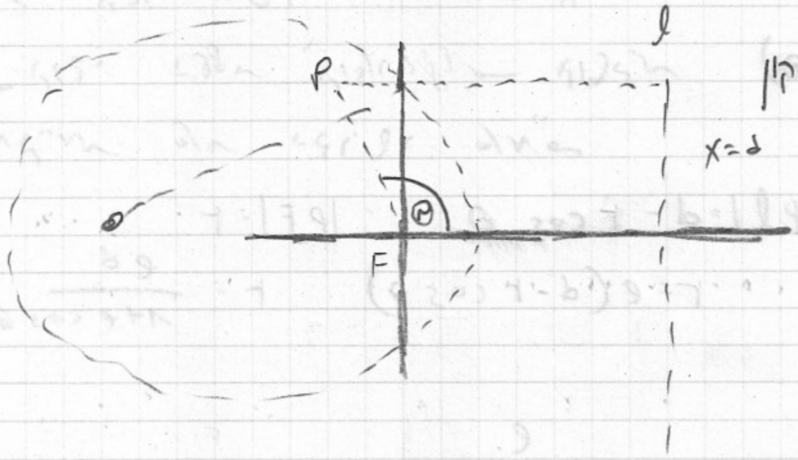
$$x^2+y^2=e^2(d-x)^2=e^2(d^2-2dx+x^2)$$

$$(1-e^2)x^2+2de^2x+y^2=e^2d^2$$

ובהשלמה לריבוע מלא

$$\left(x+\frac{e^2d}{1-e^2}\right)+\left(\frac{y^2}{1-e^2}\right)$$

$$r = \frac{ed}{1+e\cos\theta}$$



$$\frac{|PF|}{|PL|} = e > 0$$

אקסצנטריות

(אליפסה) $0<e<1$

$$\frac{(x+c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{b^2}{a} = ed$$

$$c = \frac{e^2 d}{1-e^2} = -h$$

$$e = \frac{c}{a}$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \qquad (a>b)$$