

מבוא לתורת הפונקציות

הקדמה:

הפונקציה $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ נקראת פונקציה אם לכל $u \in U$ קיים $f(u) \in \mathbb{R}^m$.
 הפונקציה f נקראת פונקציה אם לכל $u \in U$ קיים $f(u) \in \mathbb{R}^m$.

DMT

אם $a \in U$ ו- $\text{rank}(Df(a)) = m$ אז הפונקציה $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ היא פונקציה פתוחה.
 $f \leftarrow$ הפונקציה פתוחה.

מסקנה חשובה: שיטת כושר

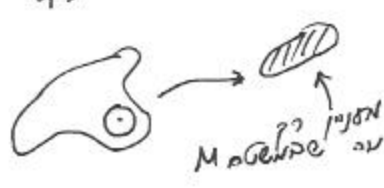
נניח שיש לנו k פונקציות $g_i: U \rightarrow \mathbb{R}$ $1 \leq i \leq k$.
 נגדיר $M = \{x \in U : g_i(x) = 0 \ \forall i\}$.

אם $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ היא פונקציה, אז f היא פונקציה פתוחה.
 הפונקציה f היא פונקציה פתוחה.

$(a - \text{הסביבה של } a)$
 $a \in M \ \forall x \in U_a \cap M$
 $f(x) \leq f(a)$ מקסימום ממוקם.
 $f(x) \geq f(a)$ מינימום ממוקם.

הצגה:

$a \in \mathbb{R}^n \cap M$ נקראת נקודה מינימום (מקסימום) של f אם קיים U_a סביבה של a כך ש-
 $f(x) \geq f(a) \ \forall x \in U_a \cap M$



משפט

(א) נניח ש- f היא פונקציה (מקסימום, מינימום, פונקציה) f .

אז f היא פונקציה (מקסימום, מינימום, פונקציה) f .

אם f היא פונקציה (מקסימום, מינימום, פונקציה) f , אז f היא פונקציה (מקסימום, מינימום, פונקציה) f .

(ב) נניח ש- f היא פונקציה (מקסימום, מינימום, פונקציה) f . אז f היא פונקציה (מקסימום, מינימום, פונקציה) f .

אם f היא פונקציה (מקסימום, מינימום, פונקציה) f , אז f היא פונקציה (מקסימום, מינימום, פונקציה) f .

אם f היא פונקציה (מקסימום, מינימום, פונקציה) f , אז f היא פונקציה (מקסימום, מינימום, פונקציה) f .

(ג) נניח ש- f היא פונקציה (מקסימום, מינימום, פונקציה) f . אז f היא פונקציה (מקסימום, מינימום, פונקציה) f .

$$C, C' \text{ נורמות} \quad C \|X\|_{(2)} \leq \|X\|_{(1)} \leq C' \|X\|_{(2)}$$

$$(\| \cdot \|_{(2)} \text{ של היותה סכום הריבועים}) \quad g(x) = \|X\|_{(2)} - 1 = C \quad \text{אם } x \text{ איננו אפס}$$

$$f(x) = \|X\|_{(1)}$$

משפט כוסי ארצרי

נניח $\nabla g_1, \dots, \nabla g_k$ ו- C' פונקציה $g_i: U \rightarrow \mathbb{R}$
 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ ו- $M = \{x \in U : g_i(x) = 0 \quad 1 \leq i \leq k\}$
 פונקציה $C'(U)$

אם $\nabla f(a) \notin \text{span} \{ \nabla g_i(a) \}_{i=1}^k$ אז $a \in M$ נקרא נקודה חריגה
 פונקציה $H: U \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$ ו- $H(x) = \begin{pmatrix} f(x) \\ g_1(x) \\ \vdots \\ g_k(x) \end{pmatrix}$
 אז $[C' \text{ פונקציה}] \quad C'(U)$
 $\text{rank}(D_H(a)) \geq k$

כי ∇g_i אינם כוסי

נניח $a \in M$ היא נקודה חריגה חריגה $x \in U \cap M$ אז $f(x) \geq f(a)$
 $\nabla f(a) \in \text{span} \{ \nabla g_i(a) \}_{i=1}^k$ אז $\text{rank}(D_H(a)) = k+1$
 אז $H(a)$ היא נקודה חריגה של $H(U \cap M)$ [הפונקציה הפונקציה]

$$H(a) = \begin{pmatrix} f(a) \\ g_1(a) \\ \vdots \\ g_k(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(a) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$a \in M \Rightarrow g_i(a) = 0$
 אז $x_t \in M$! $t \in f(a)$ אז $H(x_t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$
 כי $x_t \in M$ אז $f(x_t) = t < f(a)$

$$x_t \in M \cap U_a \Leftrightarrow i \text{ אז } g_i(x_t) = 0$$

$$f(x_t) = t < f(a)$$

סוגיה אחרת - a חריגה חריגה $\nabla f(a) \in \text{span} \{ \nabla g_i(a) \}_{i=1}^k$
ביאור:

מחשבים - M חריגה חריגה M חריגה חריגה
 $L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = f(\vec{x}) = \sum_{j=1}^k \lambda_j g_j(\vec{x})$
 $x_i \in U$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$

$$\nabla f(a) = \sum_{j=1}^k \nabla g_j(a) \lambda_j$$

$$0 = \nabla L = \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i} = \nabla f - \sum \lambda_i \nabla g_i & 1 \leq i \leq n \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = g_i & 1 \leq i \leq k \end{cases}$$

$\nabla f - \sum_{j=1}^k \lambda_j \nabla g_j = 0$

$$M \rightarrow \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^k$$

ולכן למיניהם $\nabla L = 0$ משתנה ללא-היתוך המקומי האלו.

$\rightarrow n/k$ $n+k$! n/k $n+k$ $\rightarrow \sigma$ n/k $n+k$

11/11/23

$$\sum_{i=1}^n a_i X_i = \langle a, X \rangle = d$$

① למי חסד מימי האופור

(2) $\downarrow$ $\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$

$$0 \neq a \in \mathbb{R}^n$$

מצינו א- הנקמה וזו קרובה לראש- צדקיה שביא בעל מילר

$$f(x) = d^2(0, x) = |x|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

מנוקדיה קצרים עליה איננה :

$$g(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i - d = 0 \quad \text{in } \mathcal{H}_k$$

$$L(x, \lambda) = f(x) - \lambda g(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \lambda \left[\sum_{j=1}^m a_j x_j - 1 \right] : x_j \in \mathbb{R} \quad \text{با } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$0 = \nabla L = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x_i} = 2x_i - \lambda a_i \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum_{j=1}^n a_j x_j - d \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_i = \frac{xa_i}{2} \\ \sum_{j=1}^n a_j x_j = d \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^n a_j \underbrace{\left(\frac{x_j}{z} \right)}_{x_j} = d$$

$$\hat{x}_j = \frac{\sum a_{ij}}{\sqrt{\sum_{j=1}^n a_{ij}^2}}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{2d}{\sum_{j=1}^n a_j^2}$$

$$\sum \frac{a_j^2}{b_j} \geq 18n$$

$$\frac{\lambda}{2} \sum_{j=1}^n a_j^2 = d$$

יש מקום - מינימל / מקסימל כי לובי תקורה סדרה המיליון (לוח: לאם המיליון)

(Pw'ogN jk $\Leftarrow$ p10n ~~the~~ k1)

חג מולד 1937

$$d(0, \hat{x}) = \left| \frac{(a_{1d}, a_{2d}, \dots, a_{nd})}{(\sum_j a_j^2)} \right| = \frac{|d|}{\sqrt{\sum_{j=1}^n a_j^2}}$$

②

Holder inequality

$$\lambda \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \lambda \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{1/q}}_{\|y\|_q}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad p, q \geq 1 \quad \text{כאן}$$

$$p = q = 2 \quad \text{קושי שווה}$$

הערה: אם $\lambda > 0$ אז $X \rightarrow \lambda X$ והוא גורם

$$\sum_{i=1}^n |x_i|^p = 1 \quad \text{אם נניח}$$

$$\sum_{i=1}^n |x_i| |y_i| \geq \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right|$$

ולכן עליהם $x_i, y_i \geq 0$

הוכחה באינדוקציה על n : בסיס $n=1$ - שוויון ביניים.

$$|x| |y| = (|x|^p)^{1/p} (|y|^q)^{1/q}$$

עליה להשתמש בכך $j \leq n-1$ (אנחנו נבחר n :)

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, \sum |x_i|^p = 1\}$$

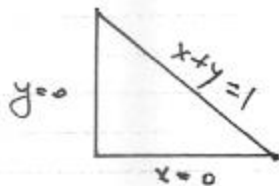
אם $x \in K$ וקוונטום $f(x) = \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$

$$\{x \in K : x_i = 0\}$$

$$K = \partial K \cup \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{matrix} x_i > 0 \\ \sum_{i=1}^n x_i^p = 1 \end{matrix} \right\}$$

הנה ∂K הוא קוויטרזיה
אחר ∂K

קבוצה פתוחה וקטורה.



$$g(x) = \sum_{i=1}^n x_i^p - 1 = 0 \quad \text{מנקודה}$$

$$(x_i > 0 \quad \text{כל } i)$$

$$U = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i > 0 \quad \forall i\}$$

$$C^1(U) \quad g: U \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\nabla g = (p x_1^{p-1}, \dots, p x_n^{p-1}) \neq 0$$

$$L(\underbrace{x_1, \dots, x_n}_x, \lambda) = f(x) - \lambda g(x)$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i y_i - \lambda \left(\sum_{i=1}^n x_i^p - 1 \right)$$

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial L}{\partial x_i} = y_i - \lambda p x_i^{p-1} & (*) \quad 1 \leq i \leq n \\ 0 = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum x_i^p - 1 & (**)$$

$$\lambda p \cdot / \quad y_i = \lambda p x_i^{p-1} \quad \Leftarrow (*)$$

$$x_i = \left(\frac{y_i}{\lambda p} \right)^{1/p-1}$$

$$1 = \sum_{i=1}^n x_i^p = \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i}{\lambda p} \right)^{p/p-1} \quad \Leftarrow (**)$$

$$\sum_{i=1}^n y_i^{p/p-1} = (\lambda p)^{p/p-1} \quad \text{נכון}$$

$$\lambda = \left(\sum_{i=1}^n y_i^{p/p-1} \right)^{p-1}$$

$$x_i = \left(\frac{y_i}{\lambda p} \right)^{1/p-1} = y_i^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n y_i^{p/p-1} \right)^{-1/p}$$

$\lambda p = \dots$

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{q} = \frac{p-1}{p} \Leftrightarrow q = \frac{p}{p-1}$$

$$x_i = y_i^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n y_i^{p/p-1} \right)^{-1/p}$$

$$f(x) = \sum_{j=1}^n x_j y_j = \frac{\sum_{j=1}^n y_j^{1/p-1} y_j}{\left(\sum_{i=1}^n y_i^{p/p-1} \right)^{1/p}} = \frac{\sum_{j=1}^n y_j^{p/p-1}}{\left(\sum_{i=1}^n y_i^{p/p-1} \right)^{1/p}} = \left(\sum_{j=1}^n y_j^{p/p-1} \right)^{1-\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\sum_{j=1}^n y_j^{p/p-1} \right)^{1/p}$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^n y_j^q \right)^{1/q} \quad \text{דיברנו}$$

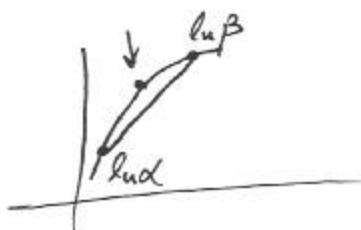
המשפט: כנסים: $\alpha, \beta \geq 0$ ו- $0 < \lambda < 1$ אז
 $\lambda \ln \alpha + (1-\lambda) \ln \beta \leq \ln(\lambda \alpha + (1-\lambda) \beta)$
 הנקראת אי-שוויון ינסון.

$$\alpha^\lambda \beta^{1-\lambda} \leq \lambda \alpha + (1-\lambda) \beta$$

אם $\alpha, \beta \geq 0$ ו- $0 < \lambda < 1$ אז
 $\lambda \ln \alpha + (1-\lambda) \ln \beta \leq \ln(\lambda \alpha + (1-\lambda) \beta)$

$$\lambda \ln \alpha + (1-\lambda) \ln \beta \leq \ln(\lambda \alpha + (1-\lambda) \beta)$$

$\beta \leq \lambda \alpha + (1-\lambda) \beta$



הנקראת

$$\beta = b^a$$

$$\alpha = a^p$$

נניח

$$\lambda = \frac{1}{p}$$

$$\forall a, b > 0$$

$$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad \text{כאשר}$$

11) $x_i, y_i \geq 0 \quad \sum y_i^q = 1 \quad \sum x_i^p = 1 \quad \text{אז: } \sum x_i y_i \leq 1$

$$\sum x_i y_i \leq \sum \left(\frac{x_i^p}{p} + \frac{y_i^q}{q} \right) =$$

המשפט של מנצ'רסון

$$= \underbrace{\frac{1}{p} \sum_{i=1}^n x_i^p}_1 + \underbrace{\frac{1}{q} \sum_{i=1}^n y_i^q}_1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|x\|_p \cdot \|y\|_q$$