

4.11.08

זמר קוזל

zemer.kos@post.eau.ac.il

8302

תחומים ופתוחות - virtual

טופולוגיה

המרחב $\mathbb{R}^n$: $x \in \mathbb{R}^n$: $(x_1, \dots, x_n)$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

מטריקת סטנדרטית

$$|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

מרחק בין 2 נקודות: $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$d(x, y) = |x - y|$$

המרחק -

$$\underbrace{|x_n - x|}_{\mathbb{R}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \iff x_n \rightarrow x \text{ (הסכמה)}$$

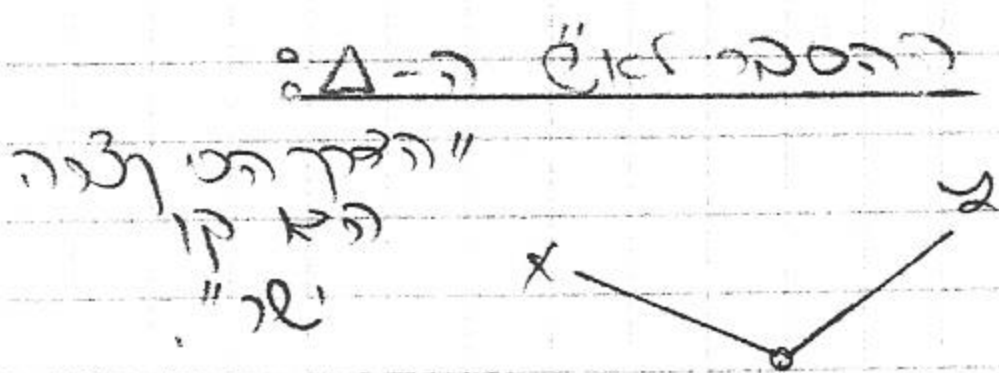
תכונות של מרחק:

$$(1) \text{ סימטרי: } d(x, y) = d(y, x)$$

$$(2) \text{ חיובי: } d(x, y) \geq 0$$

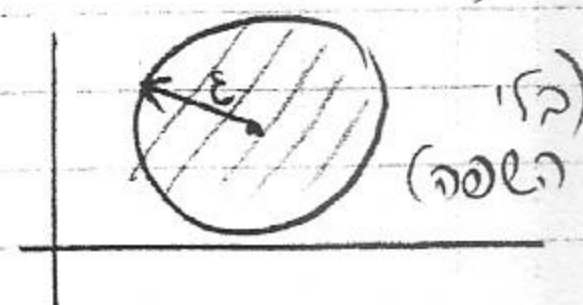
$$d(x, y) = 0 \iff x = y$$

$$(3) \text{ אי-טריוויאלי: } d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$$



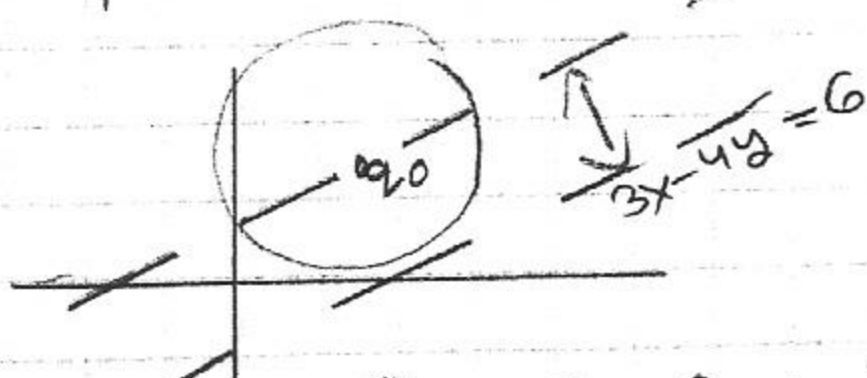
קבוצה פתוחה - (המרחק הטופולוגי מוגדר על ידי המרחק)

$$B(x, \epsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < \epsilon\}$$



הגדרה: קבוצה $G \subseteq \mathbb{R}^n$ היא פתוחה אם לכל $x \in G$ קיים $\epsilon > 0$ כזה ש-

$$B(x, \epsilon) \subseteq G$$



$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x - 4y < 6\}$$

נוסחה כי הקבוצה פתוחה: יהי $q_0 = (x_0, y_0) \in G$. נגדור ישר l כך ש-

$$3x - 4y = 6 \text{ (הישרים נשאר). } d = 3x - 4y. \text{ } d \text{ נמצא על}$$

$$\text{הצורה של } q_0, x_0. \text{ } d = 3x_0 - 4y_0. \text{ המרחק בין הישר ל } q_0$$

$$3x - 4y = 6 \text{ הוא קו ישר ונמצא קו-טangent, } B(q_0, \epsilon) \subseteq G$$

$$B(x, \varepsilon) = \{y : |x-y| < \varepsilon\}$$

הוא קבוצה פתוחה.

קבוצה סגורה - 2 הצורות שקולות. קבוצה F היא סגורה אם
מרחיבים השקלים מתקיים:

$$① \quad F \text{ סגורה} \Leftrightarrow F^c \text{ פתוחה (זהויות הבית).}$$

$$② \quad \text{אם } x_n \rightarrow x \text{ (סדרה שמתכנסת ל-} x \text{)}, \text{ אז } x \in F.$$

באחר, קבוצה שמכילה את כל נקודות ההצטברות שלה.

$$\text{לדוגמה: } C = \{x : |x| = a\}, 0 < a \in \mathbb{R} \text{ , הקבוצה סגורה.}$$

$$\text{תהי } F \ni x_n \rightarrow x \text{ אז } (|x_n - x| \rightarrow 0) \text{ אז } x \in F.$$

$$|x_n| - |x - x_n| \leq |x| = |(x - x_n) + x_n| \leq |x - x_n| + |x_n|$$

$$(|x| - |y| \leq |x - y|)$$

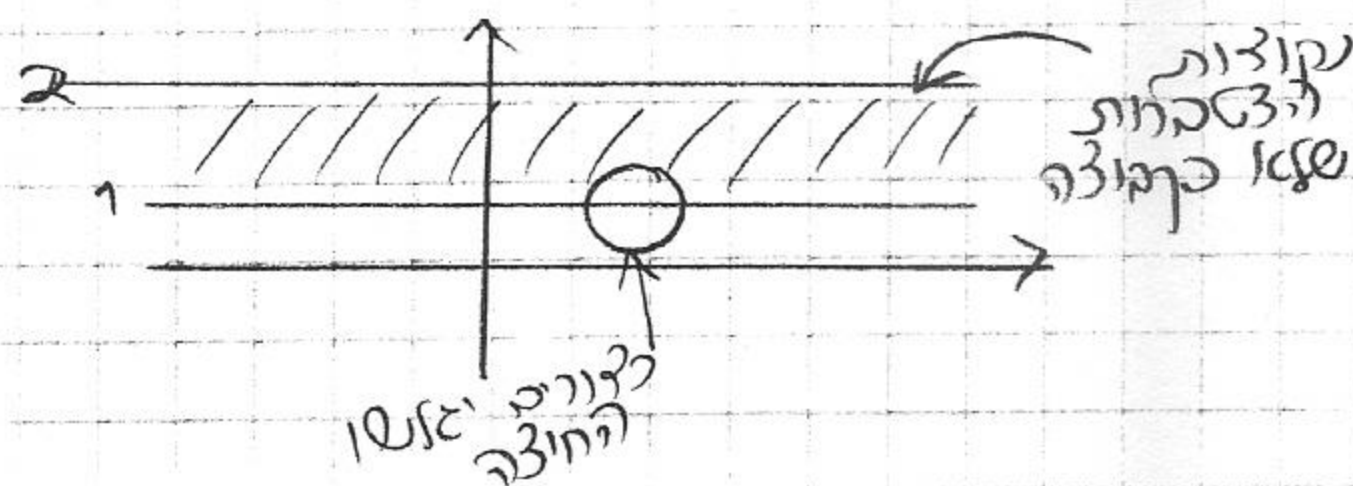
נשאל את ה- Δ אינסוף ואז ממשל הסגירות $|x| = a$ וכן C סגורה.

$$\text{צורת נוספת: } B(x, \varepsilon) = \{y : |x - y| \leq \varepsilon\}$$

$$③ \quad \text{קובייה סגורה} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i\}$$

$$\text{קבוצה לא פתוחה ולא סגורה} = \{(x, y) : 1 \leq y \leq 2\}$$



הצורות נוספות:

$$① \quad \text{תהי } A \subseteq \mathbb{R}^n, \quad \text{Int}(A) = \{x \in A : \exists \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \subseteq A\}$$

הקבוצה הפתוחה המינימלית שבתוך A .

$$② \quad \text{Ext}(A) = \text{Int}(A^c) \quad \text{החלק של } A^c$$

$$③ \quad \partial A = (\text{Int}(A) \cup \text{Ext}(A))^c = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset, \emptyset \neq B(x, \varepsilon) \cap A^c\}$$

הספה: ∂A הוא השפה בין הפנים לחלק של A .



$$④ \quad \bar{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists x_n \in A, x_n \rightarrow x\} = \text{Int}(A) \cup \partial A$$

הקבוצה הסגורה המינימלית המכילה את A .

$$G = \{(x, y) : 4x - 3y < 6\} \quad \text{קבוצה}$$

$$\text{Int } G = G$$

היא קבוצה פתוחה. (כלומר, לכל קבוצה פתוחה, הפנים שלה יהיה היא קבוצה פתוחה.)

$$E_{x \in G} = \text{Int}(G^c)$$

$$G^c = \{(x, y) : 4x - 3y \geq 6\}$$

$$E_{x \in G} = \{(x, y) : 4x - 3y > 6\}$$

$$\partial G = \{(x, y) : 4x - 3y = 6\}$$

$$\bar{G} = \{(x, y) : 4x - 3y \leq 6\} = \text{Int}(G) \cup \partial G$$

קבוצות קומפקטיות

תהי $F \subseteq \mathbb{R}^n$

סגורה: התנאים הבאים שחלים:

① לכל $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq F$ סדרה ב- F קיימת תת סדרה $\{x_{n_k}\}$ ו- $x \in F$ כך ש- $x_{n_k} \rightarrow x$.

② $F \subseteq B(0, R)$ (קיים רדיוס $R > 0$ כך ש- $F \subseteq B(0, R)$) (תכונה: חסומה = קיים $R > 0$ כך ש- $|x| \leq R$ $\forall x \in F$).

③ לכל כיסוי פתוח של F קיים תת כיסוי סופי. כלומר, לכל $\mathcal{A}$ סגור.

קבוצות פתוחות כך ש- $F \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ קיימים $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n} \in A$ כך ש- $F \subseteq \bigcup_{k=1}^n U_{\alpha_k}$.

הערה: ① $\Leftrightarrow$ ② ו-③ נכון עבור $\mathbb{R}^n$, וזהו א, וזהו א.

סדרה ב- A . צ"ל: תת סדרה מתכנסת למחזור ב- A .

$x^k = (x_1^k, \dots, x_n^k)$ נכון ש- A חסומה נכון כי קיים $R > 0$

$$\text{כך ש-} |x_1^k| \leq |x^k| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^k)^2} \leq R$$

הסדרה $\{x_1^k\}_{k=1}^{\infty}$ סדרה ממשיך חסומה ומקובצט וירטואליס יעלה

תת סדרה מתכנסת $x_1^{k_\ell} \rightarrow x_1$

[מכאן נובעות נוסחאות] $x_2^\ell = x_2^{k_\ell}$ כ- x_2^ℓ נעשה אותו דבר ונקבל

תת סדרה $x_2^\ell \rightarrow x_2$ ($x_1^\ell \rightarrow x_1$) $\rightarrow$ תת סדרה של סדרה מתכנסת

... נעשה את זה ח פעמים... ונקבלו תת סדרה $x^{k_\ell} \rightarrow x$ המתאימה $x_i^{k_\ell} \rightarrow x_i$

$$\text{נסמן } x = (x_1, \dots, x_n) \rightarrow 0 \text{ } |x_i^{k_\ell} - x_i| \leq \max_{i=1, \dots, n} |x_i^{k_\ell} - x_i| \rightarrow 0$$

קובע $x \in A$ $x^{k_\ell} \rightarrow x$ א סדרה. קובע ③ $\Leftrightarrow$ ①.

סדר ערכים $\textcircled{19} \Leftarrow \textcircled{20}$. מניחים כי $x^k \in K$ יש תת סדרה $x^{k_e} \rightarrow x \in K$.
 צ"ל: K סגורה וחסומה.

[השערת בית - מניחים כי f א קומפקטית (ז"פ הציורה f) וכל $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ וציפה חיזקיים $f(K)$ חסומה.]

חסימות של K : פונקציה טיפה $f(x) = |x|$ פונקציה וציפה.

מכך ש- $f(K)$ חסומה ק"מ $R > 0$ R ק"ש-
 $f(K) = \{f(x) : x \in K\}$
 $|x| = f(x) < R$ $x \in K$.

סגורה: נניח בשלילה כי K לא סגורה. אזי קיימת $x_0 \notin K$ $x^k \rightarrow x_0$.

נבחר: $g(x) = \frac{1}{|x - x_0|}$. g וציפה על K כי $x_0 \notin K$.

אז g שם פונקציה וציפות שהחמנה לא מתאפשר.

$$g(x^k) = \frac{1}{|x^k - x_0|} \rightarrow \infty$$

סתירה זכך ש- $g(K)$ צריכה להיות חסומה.
 לכן K סגורה.

פונקציות וציפות

פונקציה $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ נקראת וציפה ב- $x_0 \in A$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

כלומר, לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x \in A$ $|x - x_0| < \delta$ מתקיים



$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

טענה: משפט קנטור (וירטואל)

אם $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ וציפה ו- K קומפקטית, אזי f מקבלת מינימום ומקסימום על K .

הוכחה: (נסמן $a = \inf_{x \in K} f(x)$). מהגדרת האינפימום ישנו סדרה $x^k \in K$

כך ש- $f(x^k) \rightarrow a$. K קומפקטית (וכן C) - $\{x^k\}$ יש תת סדרה מתכנסת

$x^k \rightarrow x^0 \in K$. ואז: $f(x^k) \xrightarrow{\text{ציפות}} f(x^0)$. N $\exists$ שט: $f(x^k) \rightarrow a$
 $\downarrow$
 $f(x^k) \rightarrow a$

$$f(x^0) = a = \min_{x \in K} f(x)$$

(המקסימום זה אותו דבר).

נורמות ב- $\mathbb{R}^n$:

הצורה פונקציה: $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ הנורמה:

① (וקטור האפס) $\|x\| = 0 \iff x = 0$

② לכל $x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$: $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ - הומוגניות.

③ אי שוויון המשולש - לכל $x, y \in \mathbb{R}^n$: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$\|x-y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$\|x\| = \|(x+y) - y\| \leq \|x+y\| + \|y\|$

$\Rightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x+y\|$

צמצומות: $x = (x_1, \dots, x_n)$



① אוקלידית: $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$



② נורמת max: $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

$\|x\|_\infty < 1$



③ נורמת L1: $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$

$\|x\|_1 = 1$

$\|x\|_2 = 1$

④ לכל $q \geq 1$: $\|x\|_q = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^q\right)^{1/q}$

תוצאות: אם $0 < q < 1$, אז $\|x\|_q$ אינו נורמה (כמו שאנחנו רואים ב- $\mathbb{R}^2$).

טענה: מרחב של התוצאות: הצורה: נורמות $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_\infty$ נקראות שלמות אם

קיימים קבועים $c, C > 0$ כך שכל $x \in \mathbb{R}^n$

$c \|x\|_\infty \leq \|x\| \leq C \|x\|_\infty$

זהו יחס שקילות, מתקיים: $\|x_n - x\|_\infty \rightarrow 0 \iff \|x_n - x\| \rightarrow 0$

טענה: ב- $\mathbb{R}^n$ כל הנורמות שקילות.

הוכחה: הוכחה שכל נורמה שקולה לאוקלידית. כלומר, לכל $\|\cdot\|$ ב- $\mathbb{R}^n$

קיימים $c, C > 0$ כך ש- $c|x| \leq \|x\| \leq C|x|$

נניח $C > 0$ יהי $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ אנחנו רוצים להוכיח את הטענה

ש- e_i הן וקטורים הסטנדרטיים ב- $\mathbb{R}^n$. (1 במקום זה ובט הלוא אפסים)

$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|x_i e_i\| = \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\| \leq \max |x_i| \cdot \sum_{i=1}^n \|e_i\| = C \|x\|_\infty$

$\left(\max |x_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \right)$

$$\|x\| \leq C \cdot |x| \quad \text{קבוע}$$

$$\|x-y\| \leq C|x-y|$$

א"י הפונקציה $f(x) = \|x\|$ מקיימת תנאי זיפסל והוכחה רציפה.

$$| \|x\| - \|y\| | \leq \|x-y\| \leq C|x-y|$$

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\} \quad \text{נעדר} \quad C; \quad \text{מכאן כלל את } C$$

נראה קבוצה סגורה (הוכחנו בהתחלה) וחסימה, למשל $\mathbb{R}^2$, ולכן קומפקטיות.

הפונקציה $\|x\| \rightarrow C$ רציפה על K (כי היא רציפה ב- $\mathbb{R}^n$) ולכן קיים

$$x_0 \in K \text{ שבו } \|x_0\| = \min_{x \in K} \|x\|.$$

אם $c > 0$ וזמן $\|x_0\| = c$ ולכן לכל x : $|x| = 1$ מתקיים $\|x\| \geq c$.

$$x = |x| \cdot \underbrace{\left(\frac{x}{|x|}\right)}_{x_0}$$

$$= |x| \cdot x_0$$

$$\|x\| = |x| \cdot \|x_0\| \geq c \cdot |x| \cdot \underbrace{\|x_0\|}_{=1} = c \cdot |x|$$

$$C_a = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = a\} \quad \text{מסתובב: קבוצה סגורה וחסימה ב- } \mathbb{R}^n$$

אולי צריך כמו
אופטימי

(חשבונית)
(כי)

$$a = \|x\| \geq c \cdot |x|$$

$$|x| \leq \frac{a}{c}$$