30.12.2005

תרגול מספר 9

ניתן לזה תודה [illegible] · [illegible] [illegible]

משפט

יהיו $U,V\subset\mathbb{R}^n$ קבוצות פתוחות, $T:U\to V$ העתקה חלקה, חח"ע ועל.
תהי $E\subset U$ קבוצה מדידה ז'ורדן כך ש $\bar{E}\subset U$ ותהי $f:T(E)\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית.
אזי $\int_{T(E)} f(y)\,dy=\int_E f\circ T(x)\,|JT(x)|\,dx$ כאשר $JT(x)=\det\left(\frac{\partial x_i}{\partial u_j}\right)$ היעקוביאן

$$T(u_1,u_2\dots u_n)=(x_1,\dots x_n)$$

מקרה פרטי: $E=[a,b]\subset\mathbb{R}$ $\quad \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\,dy=\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$

דוגמא

נקח

$$T(u,v)=(x,y)$$

$$\begin{cases} x=x(u,v)=2u+v+1\\ y=y(u,v)=2v-u+1\end{cases}$$

חשבו את שטח האזור במישור (x,y), הנתון במישור (u,v) ע"י $u^2+v^2\le 1$

פתרון

$$vol(T(E))=\int_{T(E)} 1\,dx\,dy=\int_{u^2+v^2\le 1} 1\,|JT(u,v)|\,du\,dv$$

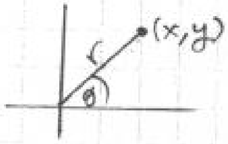
$$T\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2u+v+1\\2v-u+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$JT=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}&\frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}\Rightarrow |JT|=5$$

* הערה: בהעתקה לינארית היעקוביאן תמיד קבוע.

$$\int_{T(E)} 1\,dx\,dy=\int_{u^2+v^2\le 1} 5\,du\,dv=5\int_{u^2+v^2\le 1} 1\,du\,dv=5\,vol(\text{עיגול ברדיוס } 1)=5\pi$$

קואורדינטות קוטביות



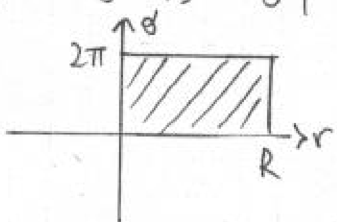
$$T(r,\theta)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$$

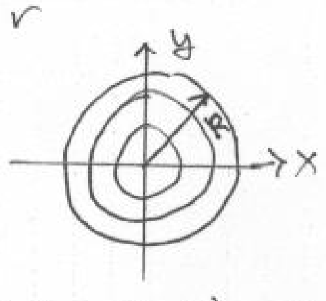
$$J_T(r,\theta)=\left|\det\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial r}&\frac{\partial x}{\partial\theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r}&\frac{\partial y}{\partial\theta}\end{pmatrix}\right|=\left|\det\begin{pmatrix}\cos\theta&-r\sin\theta\\ \sin\theta&r\cos\theta\end{pmatrix}\right|=$$

$$=|r\cos^2\theta+r\sin^2\theta|=r$$

נשים לב:

אינטגרציה במלבן יותר פשוטה





$$\iint_{T(E)} f(x,y)\,dx\,dy=\iint_E f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

דוגמא

חשבו $\int_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$

כאשר $D=\{(x,y) \mid x,y \geq 0 \quad x^2+y^2 \leq a^2\}$.

$\Leftarrow D=\{0 \leq r \leq a \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$

התנאים שמגדירים את D 1. $0 \leq r \leq a$

2. $x = r\cos\theta \geq 0$

$y = r\sin\theta \geq 0$

$\theta \in [0,\pi]$

$\theta \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

החיתוך של שני קטעים אלה הוא $[0,\frac{\pi}{2}]$

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2}\int_0^a \sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}\; r\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^a r\cdot r\,dr\,d\theta = \int_0^a r^2\,dr \int_0^{\pi/2} 1\cdot d\theta = \frac{a^3}{3}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{a^3\pi}{6}$$

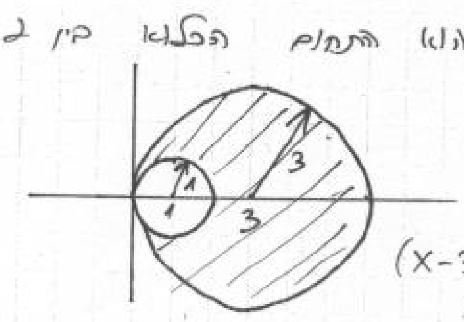
הערה 1

באופן כללי

$$\int_a^b\int_c^d f(x)g(y)\,dx\,dy = \int_a^b g(y)\,dy \int_c^d f(x)\,dx$$

דוגמא:

חשבו $\iint_D x\,dx\,dy$ כאשר D הוא התחום הכלוא בין 2 מעגלים



$(x-3)^2+y^2=3^2$

$(x-1)^2+y^2=1$

תנאי 1: $(x-3)^2+y^2 \leq 3^2$

$\Updownarrow$

$x^2+y^2 \leq 6x$

תנאי 2: $(x-1)^2+y^2 \geq 1$

$\Updownarrow$

$2x \leq x^2+y^2$

D מוגדר ע"י: $2x \leq x^2+y^2 \leq 6x$

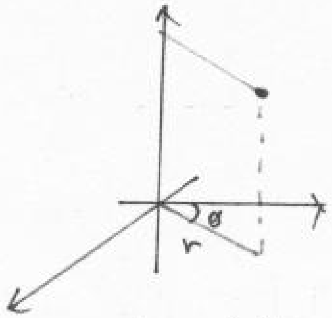
אם נעבור לקוטביות (r,θ) $2r\cos\theta \leq r^2 \leq 6r\cos\theta$

$2\cos\theta \leq r \leq 6\cos\theta$

בגלל ** התחום של θ בין $-\frac{\pi}{2}$ לבין $\frac{\pi}{2}$

$$\iint_D x\,dx\,dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{2\cos\theta}^{6\cos\theta} r\cos\theta\, r\,dr\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \int_{2\cos\theta}^{6\cos\theta} r^2\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \left(\frac{r^3}{3} \Big|_{2\cos\theta}^{6\cos\theta} \right) d\theta = \frac{6^3 - 2^3}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\theta \, d\theta = 26\pi$$



קואורדינטות גליליות

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

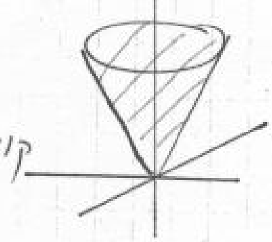
$z = z$

$$JT(r,\theta,z) = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} r\cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = r$$

דוגמא

$$\iiint_D \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \, dx\,dy\,dz$$ לחשב

$$D = \{(x,y,z) \,/\, \sqrt{x^2+y^2} \le z \le a\}$$



קונוס

$$\iiint_D \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \, dx\,dy\,dz = \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^z \frac{r^2}{\sqrt{r^2+z^2}} \, r\,dr\,d\theta\,dz =$$

$$= 2\pi \int_0^a \int_0^z \frac{r^3}{\sqrt{r^2+z^2}} \, dr\,dz = (*)$$

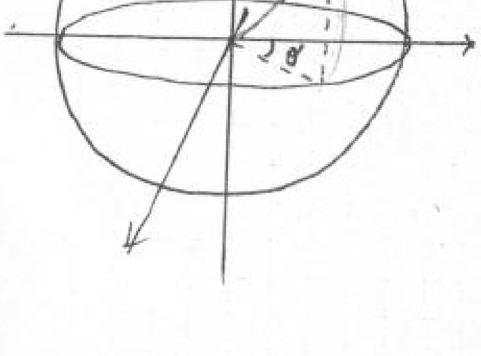
$$\int_0^z \frac{r^3}{\sqrt{r^2+z^2}} dr = \int_0^z r^2 \frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}} = \ldots = z^3\left(\sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt{2} + \frac{2}{3}\right)$$

אינטגרציה בחלקים

$$\to (*) = 2\pi\left(\sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt{8} + \frac{2}{3}\right) \int_0^a z^3 \, dz = 2\pi\left(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right) \cdot \left(\frac{z^4}{4}\right)\Big|_0^a =$$

$$= 2\pi\left(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)\frac{a^4}{4} = \frac{(2-\sqrt{2})\pi a^4}{6}$$

קואורדינטות קוטביות (כדוריות)



(הנקודה נמצאת על הספירה.)

$z = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi\sin\theta$

$x = r\sin\varphi\cos\theta$

$0 \le \varphi \le \pi$

$-\pi \le \theta \le \pi$

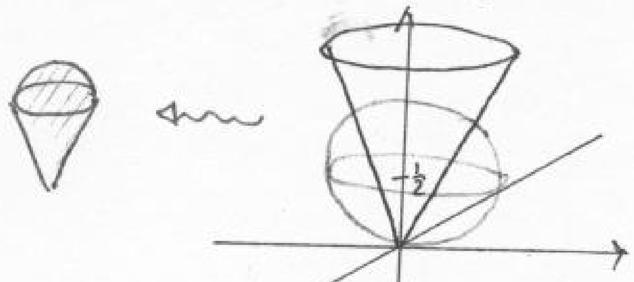
$r > 0$

$JT = r^2\sin\varphi$ במקרה זה

דוגמא

חשבו את נפח הגוף ב $\mathbb{R}^3$ החסום מלמטה ע"י $z=\sqrt{x^2+y^2}$ ומלמעלה ע"י:

$$x^2+y^2+z^2=z$$
$$\Updownarrow$$
$$x^2+y^2+\left(z-\tfrac{1}{2}\right)^2=\left(\tfrac{1}{2}\right)^2$$



נעבור לקואורדינטות קוטביות (כדוריות):

$$t=\cos\varphi=|\sin\varphi| \quad \Leftarrow \quad \underset{\text{הגדרה}}{z}=r\cos\varphi \underset{\text{חסם מלמטה}}{=} \sqrt{r^2\sin^2\varphi(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}=r|\sin\varphi|$$

$$\Updownarrow$$

$$\varphi=\frac{\pi}{4}$$

מיותר לפעמים
$$\begin{cases} 2t^2=1 \\ t=\pm\sqrt{\frac{1}{2}} \\ \cos\varphi=\sqrt{\frac{1}{2}} \\ \sin\varphi=\pm\sqrt{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$\varphi=[0,\pi]$$

יש רק אפשרות אחת $\varphi=\frac{\pi}{4}$ $\Leftarrow$ $0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$

$$r^2=x^2+y^2+z^2\le z=r\cos\varphi$$
$$r\le\cos\varphi$$

$$Vol(D)=\iiint_D 1\,dx\,dy\,dz=\int_0^{\pi/4}\int_0^{\cos\varphi}\int_0^{2\pi}1\,r^2\sin\varphi\,d\theta\,dr\,d\varphi=$$
$$=2\pi\int_0^{\pi/4}\sin\varphi\int_0^{\cos\varphi}r^2\,dr\,d\varphi=2\pi\int_0^{\pi/4}\sin\varphi\cdot\frac{r^3}{3}\Big|_0^{\cos\varphi}d\varphi=$$
$$=\frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi/4}\sin\varphi\cos^3\varphi\,d\varphi=\frac{2\pi}{3}\left(-\frac{\cos^4\varphi}{4}\right)\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{4}}=$$
$$=\frac{\pi}{6}\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{8}$$

תרגיל

חשב את השטח החסום ע"י העקום

$$\left(\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b^2}\right)=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$$

$a,b>0$

שלב 1: נעשה החלפת משתנים

$$T_1:\ x=a\tilde{x}$$
$$y=b\tilde{y}$$

בקואורדינטות $\tilde{x},\tilde{y}$ העקום הוא $(\tilde{x}^2+\tilde{y}^2)^2=\tilde{x}^2-\tilde{y}^2$

$$JT_1=\det\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}=ab$$

נבצע החלפת משתנים $(\tilde{x},\tilde{y})\sim$ $($ (r,θ)

$$\begin{cases}\tilde{x} = r\cos\theta \\ \tilde{y} = r\sin\theta\end{cases} \Rightarrow r^4 = r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = r^2\cos 2\theta$$

$$\Rightarrow r^2 = \cos 2\theta$$

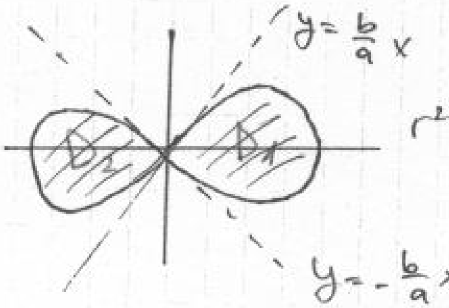
העתקה ספירית:

$T(r,\theta)$:

$x = ar\cos\theta$

$y = br\sin\theta$

$$|J_T| = \underbrace{ab}_{T_1\text{-מ}}\ \underbrace{r}_{\text{מקדם יעקוביאן קוטבי}}$$



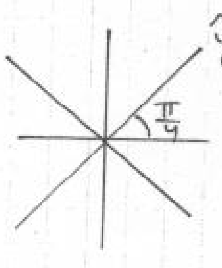
$r^2 = \cos 2\theta$

$\cos 2\theta > 0 \Leftarrow r^2 > 0$

$2\theta \in [0, 4\pi] \Leftarrow \theta \in [0, 2\pi]$

$2\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}$ $\quad \cos 2\theta = 0$

$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$



$$\begin{cases}\hat{x} = r\cos\theta \\ \hat{y} = r\sin\theta\end{cases}$$

$$Vol(D_1) = \iiint_{D_1} 1\,dx\,dy\,dz = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi/4}\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} 1\,abr\,dr\,d\theta =$$

$$= ab\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\cos 2\theta}{2}\,d\theta = \frac{ab}{4}\sin 2\theta\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{ab}{2}$$

$Vol(D_2) = Vol(D_1)$ נקבל ש D_1, D_2 סימטריים ביחס לציר y

$Vol\,D = 2Vol\,D_1 = ab$ סה"כ

דוגמא 3

תשבו את הנפח של סימפלקס ה 4 מימדי

$$\Sigma_4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0,\ \sum_{i=1}^4 x_i \leq 1\}$$

פתרון: כלומר — שאלה כ:

$$\int_{\Sigma_4} 1\,dx = \int_0^1 dx_4 \iiint_{\substack{x_1,x_2,x_3,x_4 \geq 0 \\ \sum_{i=1}^3 x_i \leq 1-x_4}} 1\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = (**)$$

כדי לחשב את: $\displaystyle\iiint_{\substack{x_1,x_2,x_3 \geq 0 \\ \sum_{i=1}^3 x_i \leq 1-x_4}} 1\,dx_1\,dx_2\,dx_3$

$u_1, u_2, u_3 \geq 0$

$\sum_{i=1}^3 u_i \leq 1$

$$T(u_1,u_2,u_3) = \begin{cases} x_1 = (1-x_4)u_1 \\ x_2 = (1-x_4)u_2 \\ x_3 = (1-x_4)u_3 \end{cases}$$

$$|JT| = \det \begin{pmatrix} 1-x_4 & & 0 \\ & 1-x_4 & \\ 0 & & 1-x_4 \end{pmatrix} = (1-x_4)^3$$

$$\iiint_{\substack{x_1,x_2,x_3 \geq 0 \\ \sum_1^3 x_i \leq 1-x_4}} 1 \, dx_1 dx_2 dx_3 = (1-x_4)^3 \iiint_{\substack{u_1,u_2,u_3 \geq 0 \\ \sum_1^3 u_i \leq 1}} 1 \, du_1 du_2 du_3 =$$

$$= (1-x_4)^3 \; vol(\Sigma_3)$$

$$\Rightarrow (**) = \int_0^1 (1-x_4)^3 \, vol(\Sigma_3) \, dx_4 = vol(\Sigma_3)\left(\tfrac{1}{4}\right) =$$

$$= \tfrac{1}{4} \, vol(\Sigma_3) = \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{3} \, vol(\Sigma_2) = \tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{3}\,\tfrac{1}{2} \, vol(\Sigma_1) =$$

$$= \frac{1}{4!}$$