

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(\xi) \quad \xi \in (a, b) : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}$$

$3 \in E$ "3" is not on map

$$\frac{1}{\nu(E)} \int_E f(x) dx = f(\xi)$$

$$B_\delta(x_0) = \{ |x - x_0| < \delta \} \text{ heißt: } \epsilon\text{-Umwelt}$$

3.4.4. $\lim_{f \rightarrow 0} \frac{1}{B(f)} \int f(x) dx = f(x_0)$

ה'תשנ"ה

אם $F \subseteq E$ אז $F \subseteq E$

$$\min f \leq \frac{1}{V(E)} \int_E f(x) dx \leq \frac{\max_E f}{\cancel{V(E)}} \int_E \cancel{1} dx$$

על $E \ni \bar{x}, x$ קיימת פונקציה f , $-f$ קיימת f
 $f(x) = \min f$, $f(\bar{x}) = \max f$

$$f(\underline{x}) \leq \frac{1}{\nu(E)} \int_E f(x) dx \leq f(\overline{x}) \quad \Leftarrow$$

$\mathbb{R}$ $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$ $\mathbb{H}$ $\mathbb{O}$ $\mathbb{N}$ $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$ $\mathbb{H}$ $\mathbb{O}$ $\mathbb{N}$

$$\frac{1}{\nu(E)} \int_E f(x) dx := M$$

$$a = \inf_E f \leq M \leq \sup_E f = b$$

$\rho = M \cdot f$

$$\frac{1}{\nu(E)} \int_E f(x) dx - \inf_E f(x) =$$

$$\frac{1}{\nu(E)} \int_E (f(x) - \inf_E f(x)) dx = (*)$$

... אז נניח שיש לנו $f(x) = \inf_E f(x)$ וכן $0 = (*)$ וכן

$$\frac{1}{v(x)} \int_E f(x) dx = f(\zeta), \text{ בן } \eta \text{ נקודות}$$

3. $\{ \text{L'Q NGP} \} \in \mathcal{L}_{\text{GPN}}$

המשפט 3.2.1. $a < M < b$ היא נקודה פנימית. f מתחלפת בנקודה פנימית x_0 כי x_0 היא נקודה פנימית.

$$\inf f(x) \leq f(\underline{x}) \leq \frac{1}{v(E)} \int f(x) dx \leq f(\bar{x}) \leq \sup f \quad : 2, 2$$

שיעור 10 - אינטגרל כפול

הפונקציה $f_{x,y}$ היא פונקציה של שני משתנים.

$$f_x(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(x_0, y) dy$$

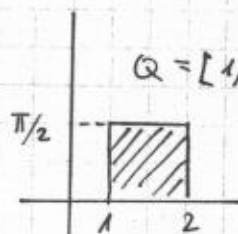
תורת פאניני

הפונקציה $f: A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ היא פונקציה של שני משתנים. $B \subset \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$.

אם $x \in A$ אז f_x היא פונקציה של y בלבד. $A \times B$ היא תחום האינטגרציה.

$$\iint_{A \times B} f(x, y) dx dy = \int_A \left(\int_B f(x, y) dy \right) dx = \int_B \left(\int_A f(x, y) dx \right) dy$$

דוגמה 1



$$Q = [1, 2] \times [0, \pi/2] \quad f(x, y) = y \sin xy$$

$$\iint_Q f(x, y) dx dy = ?$$

הפונקציה f היא פונקציה של שני משתנים. נשתמש בתורת פאניני כדי לחשב את האינטגרל הכפול.

$$\iint_Q f(x, y) dx dy = \int_1^2 \left(\int_0^{\pi/2} y \sin xy dy \right) dx = (**)$$

$$\int_0^{\pi/2} y \sin xy dy = -y \frac{\cos xy}{x} \Big|_{y=0}^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos xy}{x} dy = -\frac{\pi}{2} \frac{\cos \frac{\pi}{2} x}{x} +$$

$$+ \frac{\sin xy}{x^2} \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{\pi}{2} \frac{\cos \frac{\pi}{2} x}{x} + \frac{\sin \frac{\pi}{2} x}{x^2} = \left(-\frac{\sin \frac{\pi}{2} x}{x} \right) \Big|_1^2$$

$$\iint_Q f(x, y) dx dy = \int_0^{\pi/2} \left(\int_1^2 y \sin xy dx \right) dy =$$

$$= \int_0^{\pi/2} (-\cos xy) \Big|_{x=1}^2 dy = \int_0^{\pi/2} (\cos y - \cos 2y) dy = (\sin y - \frac{1}{2} \sin 2y) \Big|_{y=0}^{\pi/2} = 1$$

תורת פאניני

$$\left\{ \begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ f_1(x) < y < f_2(x) \\ g_1(x, y) < z < g_2(x, y) \\ \vdots \end{array} \right\} = D$$

התחום D הוא תחום האינטגרציה.

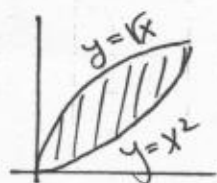
$$\int_D f(\vec{x}) dx = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \dots$$

דוגמה 2

$$f(x, y) = xy$$

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y < \sqrt{x}\}$$

הפונקציה f היא פונקציה של שני משתנים.



$$D = \{y=x^2: 0 \leq x \leq 1\} \cup \{y=x: 0 \leq x \leq 1\}$$

הפונקציה f היא פונקציה רציפה על D ולכן לפי משפט הממוצע

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^x (x \cdot y) dy \right) dx = \int_0^1 x \left(\frac{y^2}{2} \right) \Big|_{x^2}^x dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{2} \right) dx = \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^6}{12} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$$

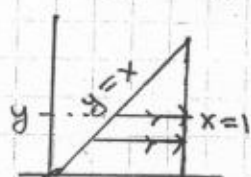
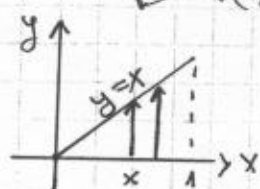
דוגמה 2

הפונקציה f היא פונקציה רציפה על D ולכן לפי משפט הממוצע

$$D = \{(x,y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$$

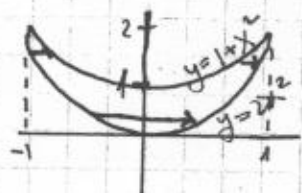
$$\int_0^1 \int_0^x f(x,y) dy dx$$

$$D = \{(x,y): 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1\} \leftarrow 0 \leq y \leq x \leq 1$$



$$D = \{(x,y): -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1+x^2\}$$

$$\int_{-1}^1 \int_{2x^2}^{1+x^2} f(x,y) dy dx$$



$$(x^2 \leq \frac{y}{2} \iff |x| \leq \sqrt{\frac{y}{2}} \iff y \geq 0 \iff 2x^2 \leq y$$

$$(y \leq 2 \iff y \leq 1+x^2 \leq 2$$

$$x^2 \geq y-1$$

$$y \geq 1$$

$$|x| \geq \sqrt{y-1}$$

$$y < 1$$

$$x \leq \sqrt{1-y} \text{ ו } x \geq -\sqrt{1-y}$$

$$D = \{(x,y): 0 \leq y \leq 1, -\sqrt{1-y} \leq x \leq \sqrt{1-y}\} \cup$$

$$\{(x,y): 1 \leq y \leq 2, \sqrt{y-1} \leq |x| \leq \sqrt{\frac{y}{2}}\}$$

$$\int_{-1}^1 \int_{2x^2}^{1+x^2} f(x,y) dx dy = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y) dx \right) dy + \int_1^2 \left(\int_{-\sqrt{\frac{y}{2}}}^{-\sqrt{y-1}} + \int_{\sqrt{y-1}}^{\sqrt{\frac{y}{2}}} \right) f(x,y) dx dy$$

דוגמה 3

$$0 < a < b$$

$$\int_a^b \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$$

הפונקציה

$$p(x) = \frac{x^b - x^a}{\ln x}$$

$$(0,1) \cdot \text{הפונקציה } p(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^b - x^a}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{bx^{b-1} - ax^{a-1}}{\frac{1}{x}} = b-a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^b - x^a}{\ln x} = 0$$

$\int_0^1 \varphi(x) dx = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \int_0^1 \left(\int_a^b x^y dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_0^1 x^y dx \right) dy =$

$\int x^y dy = \frac{x^{y+1}}{\ln x}$ $f(x,y) = x^y$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{\iint_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy} = \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2/2} r dr d\theta = \pi$$

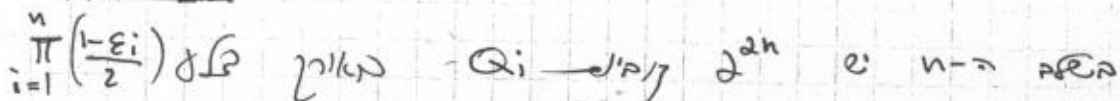
2021

$$(\varepsilon_n = \frac{1}{2^n} \quad \text{len}(f) \quad \sum \varepsilon_n < \infty \quad \text{e.g.} \quad \{\varepsilon_n\} \text{ n.p.})$$

$\frac{1}{2} + \varepsilon_0$
 $\frac{1}{2} - \varepsilon_0$
 $2\varepsilon_0 = \varepsilon_1$
 $\frac{1 - \varepsilon_1}{2}$

$A_0 = [0, 1] \times [0, 1]$ of $f(n)$
 $f(n) \gg \varepsilon \rightarrow \text{Korollar}$

בשנת 2 אחת-עשר שנים קודם לכן קיבלו אלושים גילויי צומה של צב 23


$$\sum_{i=1}^n 2^{2n} \psi(Q_i) = 2^{2n} \prod_{i=1}^n \left(\frac{1-\varepsilon_i}{2} \right)^2 = \prod_{i=1}^n (1-\varepsilon_i) \xrightarrow{\uparrow} a > 0 \Leftarrow$$

$A =$ המסלולים של קבוצה קטנה קטנה (כי הם שלם) — קבוצה קטנה לא נאמרים
 (בעיות קטנות)

$$\partial A \supset C$$

$$\sum \varepsilon_n < \infty \quad \text{אם } [0,1] \text{ — קבוצה קטנה}$$



$$A_0 = [0,1] \setminus C$$

$$A_1 = A_0 \times [0,1]$$

$$A = (A_0 \times (0,1)) \cup ((0,1) \times (0, \frac{1}{4}))$$

A — פתוחה באיחוד של פתוחה

A קטנה כי נגזר רגולרי (היא)

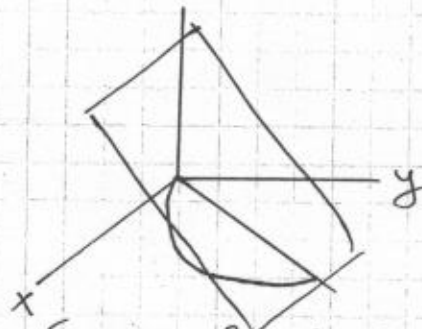
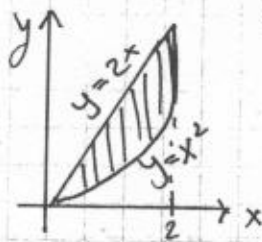
$$C \times [\frac{1}{4}, 1] \subseteq \partial A \quad (\partial A_0 \supseteq C)$$

קבוצה לא נאמרים.

הבעיה באינטגרלים

השאלה — הנפח של החלל $D \subseteq \mathbb{R}^3$ הנמצא מתחת — משוואה $y+z=4$ ונתון החלל

הגבולות במישור (x,y) — $y=2x, y=x^2$



פתרון

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 \leq y \leq 2x \end{array} \right\} \times [0,4] \quad \text{הנפח של } D = \text{הנפח של } \text{החלל} \cup \text{הנפח של } \text{החלל}$$

$$a < x < b \quad f_1 < y < f_2(x) \quad \text{הנפח של } \text{החלל}$$

$$h_1(x,y) < z \leq h_2(x,y)$$

הנפח של החלל הוא

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 \leq y \leq 2x \end{array} \right\} \quad \text{הנפח של } \text{החלל}$$

$$0 \leq z \leq 4-y \quad \text{הנפח של } \text{החלל}$$

$$z \geq 0 \quad \text{הנפח של } \text{החלל}$$

$$\begin{aligned}
 V(D) &= \iiint_D 1 \, dx \, dy \, dz = \int_0^2 \left(\int_{x^2}^{2x} \left(\int_0^{4-y} 1 \, dz \right) dy \right) dx = \\
 &= \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (4-y) \, dy \, dx = \int_0^2 \left(4y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=x^2}^{2x} dx = \\
 &= \int_0^2 \left(8x - \frac{4x^2}{2} - 4x^2 + \frac{x^2}{2} \right) dx = \frac{16}{5}
 \end{aligned}$$

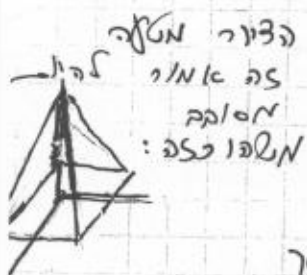
הערה

הנפח של גוף המכונה (קוסינוס) הוא $\frac{a^2 h}{3}$ (אנחנו יודעים).

פתרון

נניח $0 \leq z \leq h$ (גובה)

$$|x|, |y| \leq \frac{a}{2} \left[1 - \frac{z}{h} \right]$$



$$V(D) = \int_0^h \left(\iint_{|x|, |y| \leq \frac{a}{2} \left[1 - \frac{z}{h} \right]} 1 \, dx \, dy \right) dz$$

$$S(\square) = a^2 \left(1 - \frac{z}{h} \right)^2$$

$$\square \left\{ a \left(1 - \frac{z}{h} \right) \right\}$$

$$= \int_0^h a^2 \left(1 - \frac{z}{h} \right)^2 dz = -\frac{a^2}{h} \left(1 - \frac{z}{h} \right)^3 \Big|_0^h = \frac{a^2 h}{3}$$

קונים את הנפח R עם $0 \leq z \leq h$

$$0 \leq z \leq h$$

$$x^2 + y^2 \leq R^2 \left(1 - \frac{z}{h} \right)^2$$

$$\left(R \left[1 - \frac{z}{h} \right] \right) \text{ (רדיוס)}$$

$$\pi R^2 \left(1 - \frac{z}{h} \right)^2 \text{ (נפח)}$$

$$V(\text{גוף}) = \int_0^h \pi R^2 \left(1 - \frac{z}{h} \right)^2 dz = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

