

16.12.2008
 תורת המספרים

מספר
 3
 זוגי קולומב

תכונה - הסדר

אם A, B מספרים

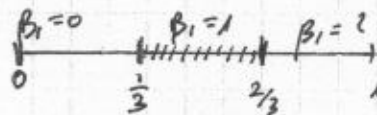
$$A+B = \{a+b : a \in A, b \in B\}$$

אם x מספר

המספר x מספר

$$0 \leq x \leq 1 \quad \mathbb{Z}_3$$

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i}{3^i} \quad \beta_i \in \{0, 1, 2\}$$

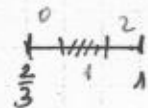
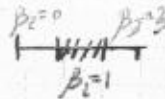


$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i}{3^i}$$

אם x מספר

$\beta_1 = 1$ ו

המספר x מספר



אם x מספר

המספר x מספר

$$x = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\gamma_i}{3^i} + \sum_{i=n}^{\infty} \frac{\beta_i}{3^i}$$

המספר x מספר

$\beta_n = 1$ ו

המספר x מספר

$\gamma_i \in \{0, 1, 2\}$

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i}{3^i}$$

אם x מספר

המספר x מספר

אם x מספר $0 \leq x \leq 2$ המספר x מספר

אם x מספר

Riemann

אם x מספר

אם $f: Q \rightarrow R$

אם $Q \subset R^n$

אם $P_i \cap P_j = \emptyset$ המספר x מספר

$\cup P_i = Q$

אם x מספר

אם x מספר

אם x מספר

אם x מספר

אם x מספר

אם x מספר

אם x מספר

$$I_* = \sup_{P \text{ חלקה}} L(f, P)$$

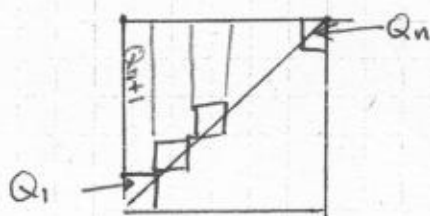
$$I^* = \inf_{P \text{ חלקה}} U(f, P)$$

$$\int_Q f dx = I_* = I^* \text{ וי"מ } \rightarrow \text{אנטיגרל של } f \text{ על } I_* = I^* \text{ אם}$$

גוף וי"מ
 f אנטיגרל-יבלי וי"מ $\Leftrightarrow \exists \epsilon > 0$ קיימת חלקה P_ϵ של Q אלמנטים
 $U(f, P_\epsilon) - L(f, P_\epsilon) < \epsilon$ ו
 גודל

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & x \neq y \\ 1 & x = y \end{cases} \quad f: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{הפונקציה הזו (הכאן)}$$

$$\int_{[0, 1]^2} f dx \quad \text{הכמות כי } f \text{ אנטיגרל-יבלי וי"מ ואלקו ק}$$



וכוח למציאת וי"מ אנטיגרל-יבלי.

הי. $\exists \epsilon > 0$ שיהיה נקודה אחת P_ϵ

$$f = 1 = \chi(x, x) : 0 \leq x \leq 1$$

$$\mathbb{R} \cap [0, 1] \sim \mathbb{R} \cap [0, 1]$$

$$\sum_{j=1}^N \chi(Q_j) < \epsilon \quad \text{על } Q_k = [\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}]^2 \quad \text{קיימת וזו קרובת אפס וזו קרובת אפס}$$

$$Q_{N+1}, \dots, Q_{N+M} \text{ של } [0, 1]^2 \quad \text{אם } \chi(Q_j) = 1 \text{ אז } Q_j \text{ חותך את } [0, 1]^2$$

$$P_\epsilon = \{Q_j\}_{j=1}^{N+M}$$

$$\exists (x, x) \in Q_j \Rightarrow M_f(Q_j) = 1 \quad 1 \leq j \leq N$$

$$M_f(Q_j) = 0 \quad \text{כי } \chi(x, x) = 1 \text{ רק על } \{(x, x) : x \in [0, 1]\}$$

$$x \neq y \quad (x, y) \text{ נמצא מחוץ ל-} [0, 1]^2$$



$$M_f(P) = m_f(P) = 0 \quad 1+N \leq j \leq N+M$$

$$U(f, P_\epsilon) - L(f, P_\epsilon) = \sum_{j=1}^N (M_f(Q_j) - m_f(Q_j)) \chi(Q_j) = \sum_{j=1}^N \chi(Q_j) < \epsilon$$

ולכן f אנטיגרל-יבלי וי"מ $\Leftrightarrow f$ אנטיגרל-יבלי

$$\int f dx = I^* = I_*$$

$$Q \subseteq [0, 1]^2 \quad \text{אפשר לבחור את } Q \text{ כגודל-אפס (קטן) וזו נקודה}$$

$$I_{*} = 0$$

$\varepsilon > 0$ $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ נתון. נגדע $f_{\varepsilon}^{\pm}: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ על ידי:

$$f_{\varepsilon}^{\pm}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } |f(x) - f_{\varepsilon}^{\pm}(x)| < \varepsilon \\ f_{\varepsilon}^{\pm}(x) & \text{otherwise} \end{cases}$$
 אז $f_{\varepsilon}^{\pm} \rightarrow f$ בנקודה x כלשהי.

לכדיה אר תיחא תיחא .
 'ה' $\varepsilon \rightarrow$ תיחא g_-^{ε} g_+^{ε} כוונת השלש . ג' P חלוקה א.

— $\mathcal{F}_p \times \mathcal{G}_p^k$ p li- ∞ 3, g_- , g_+

$$\varepsilon > \int_Q (\dot{g}_+ - \dot{g}_-) dx = \int \dot{g}_+ dx - \int \dot{g}_- dx = I^*(g_+) - I_*(g_-) \geq I^*(f) - I_*(f)$$

$$I^*(f) = \inf_{g \in \mathcal{F}} U(f, g) \leq \inf_{g \in \mathcal{F}} U(g, g) = I^*(g)$$

$$I_*(f) = \sup_{\rho \in \mathcal{P}} L(f, \rho) \leq \sup_{\rho \in \mathcal{P}} L(g_-, \rho) = I_*(g_-)$$

$$I_*(f) = I^*(f) \text{ pñ } \forall f \in \mathcal{F}$$

உயர் வேலா

$$\text{osc}_f(x) = \limsup_{y \rightarrow x} f(y) - \liminf_{y \rightarrow x} f(y) \quad f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{|y-x| < \delta} f(y) - \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf_{|y-x| < \delta} f(y))$$

$\text{osc}_f(X) = 0 \iff X \text{ is a point, } f \text{ is constant}$

f על $\omega_0 = \frac{1}{T}$ ו- $\frac{1}{P}$ נותן את $B_f = \{x : \text{osc}_f(x) > 0\}$

$B_f \Leftrightarrow \text{minimal number of } f: Q \rightarrow R$: ערכי

מחיר זניה סגור
מחיר אפס. נמוך f היא רציפה (שיטת קולבה) מחיר אפס.

: १५८

ה. $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ נוסחה N / ק"מ $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ יציב. ה קצות

Esso $\mathcal{L}_d$ è univoco in $\mathcal{B}_{f, \varepsilon} = \{x: \text{osc}_f(x) \geq \varepsilon\}$

עזרה האמה: נכיה שמעלים 17/77 פמוחה. (המשלים - $B_{4, \varepsilon}$ - $\mathbb{R}^n$)

$B_{f,\varepsilon}$ ואלו $(\subseteq \mathbb{Q})$ ואלו $B_{f,\varepsilon}$ $\Leftarrow$
 $y \in B_x(\delta) \subseteq B_x(\delta) \cap B_x(\delta)$ ואלו $\text{osc}_f(x) < \varepsilon$ $x \in \mathbb{Q}$ $\subseteq \mathbb{R}$

$$\text{osc}_f(y) < \varepsilon$$

$$x \in \mathbb{Q}, \text{osc}_f(x) < \varepsilon \quad \text{נ"ל}$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{|x-y| < \delta} f(y) - \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf_{|y-x| < \delta} f(y) < \varepsilon$$

$$\sup_{|x-y| < \delta} f(y) - \inf_{|x-y| < \delta} f(y) < 2\varepsilon \quad \bullet \text{ } \varepsilon > 0 \text{ } \delta > 0 \text{ } \text{נ"ל}$$

$$|x-y| < \delta$$



$$\text{osc}_f(z) \leq \sup_{|z-y| < \frac{\delta}{2}} f(y) - \inf_{|z-x| < \frac{\delta}{2}} f(y) < 2\varepsilon \quad \text{כאן } |z-x| < \frac{\delta}{2} \text{ ו- } |z-y| < \frac{\delta}{2}$$

הנקודה הזו

הנקודה הזו

$$\mathbb{R}^n \setminus B_{f,\varepsilon} \Leftarrow$$

למשל גורן

$$\text{נניח } B_{f,\varepsilon} \text{ אינה רציפה} \Leftarrow \text{נניח } f \text{ אינה רציפה}$$

$$U(f, \pi) - L(f, \pi) < \varepsilon \quad \text{על } Q \text{ כל } \pi \text{ ו- } \varepsilon > 0$$

$$B_{f,\varepsilon} \subseteq B_f \quad (\text{קומפקטיות}) \text{ ואינה רציפה}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \nu(R_j) < \varepsilon \quad \text{על } B_{f,\varepsilon} \text{ כל } \{R_j\}_{j=1}^{\infty} \text{ אינה רציפה}$$

$$\{R_j\}_{j=1}^N \text{ אינה רציפה} \quad B_{f,\varepsilon} \text{ קומפקטיות} \quad \text{על } B_{f,\varepsilon} \text{ כל } \{R_j\}_{j=1}^N$$

$$R_j \neq \emptyset \quad \text{על } \pi \text{ כל } \pi \text{ ו- } \varepsilon > 0$$

$$P_1, \dots, P_k \subseteq R_j^c \quad P_i \subseteq R_j \quad \text{כל } P_i \text{ אינה רציפה}$$

$$P \subseteq R_j \quad \text{כל } P \text{ אינה רציפה}$$

$$P = P \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j \quad \text{כל } P \text{ אינה רציפה}$$

$$(2) \quad \text{כל } P \text{ אינה רציפה}$$

$$U(f, \pi) - L(f, \pi) = \left(\sum_{(1)} + \sum_{(2)} \right) \text{osc}_f(R) \nu(R) = \left(\sum_{(1)} + \sum_{(2)} \right) (M_f(R) - m_f(R)) \nu(R)$$

$$\sum_{(1)} (M_f(R) - m_f(R)) \nu(R) \leq 2 \|f\|_{\infty} \sum_{(1)} \nu(R) \leq 2 \|f\|_{\infty} \sum_{j=1}^N \nu(R_j) < 2 \|f\|_{\infty} \varepsilon$$

$$\leq 2 \sup_{x \in \mathbb{Q}} |f(x)| = 2 \|f\|_{\infty}$$

הנקודה הזו

$$(1) \subseteq \bigcup_{j=1}^N R_j$$

$$x \in P \in (2)$$

68

$$\text{osc}_f(x) < \varepsilon$$

$$M_f(P) - m_f(P) < \varepsilon \quad \text{אחרי ציבון נוסף (קב)} \quad \Leftarrow$$

$$\sum_{P \in (2)} \underbrace{[M_f(P) - m_f(P)] \psi(P)}_{< \varepsilon} < \varepsilon \sum_{(2)} \psi(P) \leq \varepsilon \psi(Q) \quad \Leftarrow$$

$$U(f, \pi) - L(f, \pi) < \varepsilon (2\|f\|_\infty + V(Q)) \quad \Leftarrow$$

↑
קובי'ה בסוף
(סוף סוף)

ולכן תנאי כיוון מתקיים f אינטגרלית

הקציה מה שלשון

$$\Leftarrow B_{f, \varepsilon} \text{ קומפקט. ופזל מידה אפס} \quad \Leftarrow$$

$$(2) \text{ יש } f \text{ ב-} B_{f, \varepsilon} \text{ כיסוי סופי } \Leftarrow \text{הקציה פתוחה} \quad \Leftarrow$$

$$(3) \text{ יש } f \text{ חלוקה } \pi \text{ עבור } P \in \pi \text{ אינטגרלית} \quad \Leftarrow \text{האינטגרלית היא}$$

$$P \cap R_i \neq \emptyset \quad \Leftarrow B_i \quad \text{אחרי לא נעשה כלום}$$

$$P \cap R_2 \neq \emptyset \quad \Leftarrow$$

$$\vdots$$

$$\dots \Leftarrow P \cap R_N \neq \emptyset$$

$$(1) P \subseteq \cup R_i \text{ ו-} (2) i \text{ כך } \emptyset = P \cap R_i \quad (4) \text{ קיבלנו "}$$

$$\text{קבלנו דבריו} \quad \left(\sum_{(1)} + \sum_{(2)} \right) [M_f(P) - m_f(P)] < \varepsilon (2\|f\|_\infty + V(Q)) \quad (5)$$

$$\text{אחרי עסקה (1) והלמיה עבור (2)}$$

$$\text{כעת נוכיח } f \text{ אינטגרלית} \rightarrow \text{כיוון } B_f \text{ ממוזג אפס.}$$

$$\left[\text{על מנת להוכיח: } B_f \text{ ממוזג } \rightarrow \text{המקרה } g_- \leq f \leq g_+ \text{ קבוצות } (g_+ - g_-) < \varepsilon \quad \Leftarrow$$

$$B_f = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{f, \frac{1}{j}} \quad \text{כך } \text{osc}_f(x) \geq \frac{1}{j} \quad \Leftarrow$$

$$\text{ולכן מספיק להוכיח } B_{f, \frac{1}{j}} \text{ ממוזג אפס}$$

$$\text{כל } B_f = \text{אילוץ בן מנייה } \text{ל } B_{f, \frac{1}{j}} \text{ ממוזג אפס} \quad \Leftarrow \text{ממוזג אפס.}$$

$$B_{f, \frac{1}{j}} \text{ ממוזג אפס.}$$

$$\sum \psi(R_j) < \varepsilon \quad \{R_j\} \text{ ג'ל } \rightarrow \text{אחרי } \varepsilon > 0 \text{ ונבחר } \varepsilon \text{ אפס.}$$

$$\text{במה חלוקה } P \text{ כך } U(f, P) - L(f, P) < \frac{\varepsilon}{j} \quad \text{על } (N \text{ ממוזג מנייה ימין}).$$

$$\text{נניח } P^* = \{P \in \mathcal{P} : P \cap B_{f, \frac{1}{j}} \neq \emptyset\} \quad \text{הקבוצה } \text{ל } \{P^*\}$$

$$M_f(R) - m_f(R) > \frac{1}{j} \quad \text{כך } R \in P^* \quad \Leftarrow$$