20.1.2009
תירגול מס' 12

חדו"א מתקדם 3
באר קלנגלוב

משטחים. ב $\mathbb{R}^n$ (בדרך כלל ב - $\mathbb{R}^3$)

יש 3 סוגי הגדרות שקולות:

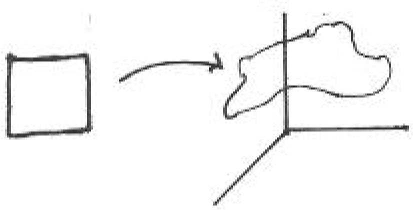
1. $M\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה חלקה אם לכל $x\in M$ קיימת סביבה U כך ש $M\cap U$ הוא גרף של פונקציה C^1.
$$M\cap U=\{(w,f(w)) : w\in\mathbb{R}^k \ \ f\in C^1(w)\}$$

2. הצגה סתומה: יש לנו $\underset{\text{תחום ב }\mathbb{R}^n}{\phi: U}\to\mathbb{R}^{n-k}$ פונקציה $C^1(U)$ ו $M=\{x\in U:\phi(x)=0\}$
צריך ש $\forall x\in M$: $\operatorname{rank} D\phi(x)=n-k$. במקרה זה ל- $D\phi$ יש מינור מסדר $n-k\times n-k$ שהדטרמיננטה שלו שונה מאפס. $\Leftarrow$ ממשפט הפונקציה הסתומה באופן מקומי M הוא גרף של פונקציה C^1.

3. הצגה פרמטרית $\gamma: \underset{\subseteq\mathbb{R}^k}{V}\to M$ V קבוצה פתוחה.

$$r(\vartheta_1,\vartheta_2\dots\vartheta_k)=\begin{cases}x_1=x(\vartheta_1,\dots\vartheta_k)\\ \vdots\\ x_n=x_n(\vartheta_1\dots\vartheta_k)\end{cases}\qquad \left\{r_{\vartheta_i}=\frac{\partial r}{\partial\vartheta_i}\right\}_{i=1}^{k} \text{ בת"ל}$$

כלומר $\operatorname{rank} Dr=k$.



דוגמאות ב $\mathbb{R}^3$

1. $$S_R^2=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2=R^2\}$$

הגדרה סתומה $\phi(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-R^2$

תחום של הצגה סתומה $U=\mathbb{R}^3$

$$\nabla\phi=(2x,2y,2z)\neq 0 \text{ על } S_R^2$$

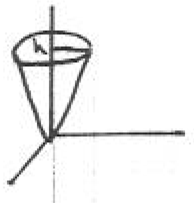
הצגה פרמטרית: בקואורדינטות ספריות:
$$r(\theta,\varphi)=\begin{cases}x=R\cos\theta\sin\varphi\\ y=R\sin\theta\sin\varphi\\ z=R\cos\varphi\end{cases}$$

תחום הצגה: $0\le\varphi\le\pi$ $-\pi\le\theta\le\pi$

$$r_\theta=\frac{\partial r}{\partial\theta}=(-R\sin\theta\sin\beta,\ R\cos\theta\sin\beta,\ 0)$$
$$r_\varphi=\frac{\partial r}{\partial\varphi}=(R\cos\theta\cos\beta,\ R\sin\theta\cos\beta,\ -R\sin\beta)$$

בנוסף מתקיים $\langle r_\theta,r_\varphi\rangle=0$ לכן הם בת"ל

2. קונוס $z=\sqrt{x^2+y^2}\le h$



הצגה פרמטרית בגליליות
$$r(\theta,z)=\begin{cases}x=z\cos\theta\\ y=z\sin\theta\\ z=z\end{cases}$$

$-\pi\le\theta\le\pi$ $0\le z\le h$

$$r_\theta = (-z\sin\theta,\ z\cos\theta,\ 0)$$

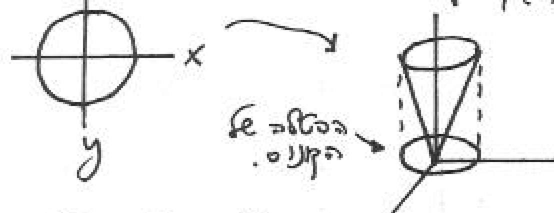
$\langle r_\theta, r_z\rangle = 0 \Leftarrow$ כנ"ל $\Leftarrow$

$$r_z = (\cos\theta,\ \sin\theta,\ 1)$$

<u>הערה</u>: כאשר $X_n = f(x_1,\dots X_{n-1})$ אז בד"כ ההצגה הנוחה ביותר

$$r(x,y) = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

תחום ההצגה: עיגול ברדיוס h - $V = \{(x,y) : x^2+y^2 \le h^2\}$



$$r_x = (1, 0, f'_x) = \left(1, 0, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

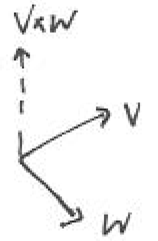
$$r_y = (0, 1, f'_y) = \left(0, 1, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

מוגדרת לכל $(x,y) \neq (0,0)$ ההצגה הזאת היא טלאי טריוויאלי.

<u>מכפלה וקטורית</u>

בהינתן $V,W \in \mathbb{R}^3$ ניתן להגדיר $V \times W = \det\begin{pmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$

כאשר $\vec{e_1} = (1,0,0)$ $\vec{e_2} = (0,1,0)$ $\vec{e_3} = (0,0,1)$ בסיס סטנדרטי.



ת.ב. בדוק שאם V,W קו"ל אז $V \times W \perp V$. $V \times W \perp W$

בקונוס לדוגמא:

$$r_x \times r_y = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & f'_x \\ 0 & 1 & f'_y \end{vmatrix} =$$

$$= e_1 \begin{vmatrix} 0 & f'_x \\ 1 & f'_y \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} 1 & f'_x \\ 0 & f'_y \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-f'_x, -f'_y, 1) = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right)$$

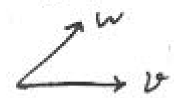
ב- $\mathbb{R}^3$: $\sqrt{\Gamma(v_1,\dots,v_{n-1})} = \sqrt{\det\left(\{a_{i,j}\}_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}\right)}$

דטרמיננטת גרהאם.

כאשר $a_{i,j} = \langle v_i, v_j\rangle$

דטרמיננטת גראם נותנת לנו את שטח המקבילון שנוצר ע"י $v_1,\dots,v_{n-1}$

$$\sqrt{\Gamma(v_1,v_2)} = |v_1 \times v_2|$$



<u>מישור משיק למשטח</u>

אם $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ מסלה אז $\gamma'(t)$ יהיה המשיק למסלה בנקודה $\gamma(t)$

$$T_xM = \left\{ V \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} \exists \gamma : [0,1] \to M \\ \exists t .\ \gamma(t) = x \\ \gamma'(t) = V \end{array} \right\}$$

- מישור המשיק ל- M בנקודה x.

במקרה ש $V \subseteq \mathbb{R}^k$ קבוצה פתוחה עבור $x \in V$ קיים $\varepsilon > 0$ כך ש $B(x,\varepsilon) \subseteq V$

לכן $\gamma_i(t) = x + t\frac{\varepsilon}{2}e_i$ עוברת כולה בתוך V.

$$\gamma_i(0) = x \qquad \gamma_i'(0) = \frac{\varepsilon e_i}{2} \Rightarrow e_i \in T_x V$$

$$T_x V \cong \mathbb{R}^k$$

כמו כן כאשר ש $\underset{\subseteq \mathbb{R}^k}{f: V} \to \underset{\subseteq \mathbb{R}^n}{M} = f(V)$ C^1 הדיפרנציאל של f מוגדר ע"י

מעבר:
$$D_f : T_x V \to T_{f(x)} f(V)$$

כי לכל $v \in T_x V$ יש מסילה γ: $\tilde{t} \in [0,1]$ כך ש $\gamma(\tilde{t}) = x$ $\gamma'(\tilde{t}) = v$

ואז נגדיר מסילה $\lambda = f \circ \gamma$

מסילה λ מקיים $\lambda(\tilde{t}) = f(x)$

$$\lambda'(\tilde{t}) = (f \circ \gamma)' = D_f(\gamma(\tilde{t})) \cdot \gamma'(\tilde{t}) = D_f(x) \cdot v$$

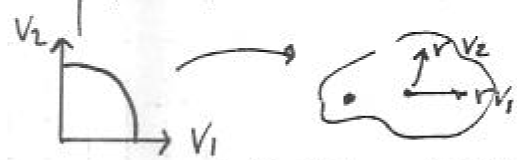
בהצגה פרמטרית: $r: \underset{\subseteq \mathbb{R}^k \text{ פתוחה.}}{V} \to M$ $\qquad r \in C'(V)$

נגדיר $\gamma_i(t)$ מסילות כמו בדוגמא של V פתוחה ב-$\mathbb{R}^k$.

$$D_f(x) : e_i \to D_f(x) \cdot e_i = r_{v_i}$$

$\{r_{v_i}\}_{i=1}^k$ בסיס

ולכן הם פורשים את המישור המשיק



מכפלה וקטורית = נורמל:

$$\pm \frac{r_{v_1} \times r_{v_2}}{|r_{v_1} \times r_{v_2}|}(x) = \vec{n}(x) \qquad x \in M$$

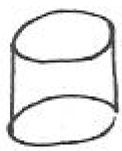
דרך שניה לחשב נורמל (הצגה סתומה):

$\phi = \underset{\subseteq \mathbb{R}^3}{U} \to R$ משטח מפריד $n-1$

$M = \{\phi = 0\}$ ו-$\nabla \phi \neq 0$ על M

הגרדיאנט אורתוגונלי לקווי גובה ולכן ל-M ומכאן $n(x) = \frac{\nabla \phi(x)}{|\nabla \phi(x)|}$

<u>דוגמא</u>



גליל: $\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ 0 < z < h \end{cases}$

בהצגה סתומה $\phi(x,y,z) = x^2 + y^2 - R^2$

$$\vec{n} = \pm \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} = \pm \frac{(2x,2y,0)}{|(2x,2y,0)|} = \pm \frac{(2x,2y,0)}{\sqrt{4x^2+4y^2}} =$$

$$= \pm \frac{(2x,2y,0)}{\sqrt{4R^2}} = \pm \left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, 0\right)$$

בהצגה הפרמטרית:

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

$$r_\theta = (-R\sin\theta, R\cos\theta, 0)$$

$$r_z = (0,0,1)$$

$$r_\theta \times r_z = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -R\sin\theta & R\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (R\cos\theta, R\sin\theta, 0) \quad |r_\theta \times r_z| = R$$

$$\vec{n}(x) = \pm \frac{r_w \times r_z}{|r_w \times r_z| = R} = \pm(\cos\theta, \sin\theta, 0) =$$

$$= \pm\left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, 0\right)$$

<u>אינטגרל משטחי</u>

מ-$\mathbb{R}^3$: יש לנו משטח $M \subseteq R^3$ מדרגה 2.

תהי: $r(v_1,v_2) = (x(v_1,v_2), \dots, z(v_1,v_n))$

$\gamma: W \to M$

ותהי: $f: M \to \mathbb{R}$

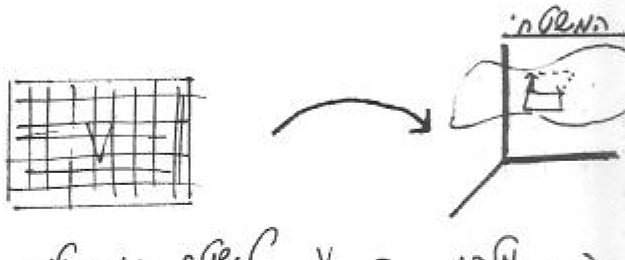
ורוצים לחשב $\int_M f\,dV$ (dV = תבנית הנפח של המשטח.)

$$\int_M f\,dV = \iint_W f \circ r\,|r_{v_1} \times r_{v_2}|\,dv_1\,dv_2$$

אם קיים.

<u>הערה 1:</u> dV היא תבנית דיפרנציאלית שנקראת תבנית נפח. חשובה אינטגרל ביחס למשטח ולא ביחס ל $\mathbb{R}^3$.

<u>הסבר מדוע זה האינטגרל המשטחי:</u>



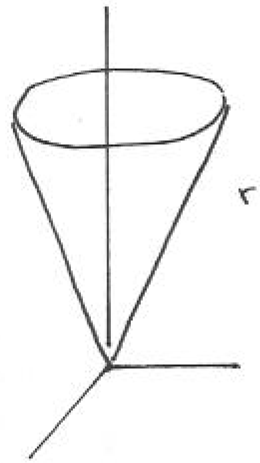
המלבן ב V עובר למקבילית שנוצרת ע״י r_{v_1}, r_{v_2}

פקטור השינוי עבור יחס בין מלבן ב V לשטח המקבילית שנוצרה.

שטח המקבילית $= |r_{v_1} \times r_{v_2}|_{dv_1,dv_2}$

$$\int_M f\,dV = \int_W\cdots\int f\circ r\sqrt{\Gamma(\vartheta_1,\dots\vartheta_k)}\,d\vartheta_1\dots d\vartheta_k$$: ב-$\mathbb{R}^n$

M יריעה k מימדית ב $\mathbb{R}^n$.



__דוגמא__

חשבו שטח של חרוט (קונוס) $z=\sqrt{x^2+y^2}\le R$

__שלב א:__ מציאת הצגה פרמטרית: $r(x,y)=(x,y,\sqrt{x^2+y^2})$

$$W=\{(x,y): x^2+y^2\le R^2\}$$

$$r_x\times r_y=(-f'_x,-f'_y,1)$$

$$\Downarrow$$

$$|r_x\times r_y|=\sqrt{{f'_x}^2+{f'_y}^2+1}=\sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}+1}=$$

$$=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}+1}=\sqrt{2}$$

$$Area(M)=\int_M 1\,dV=\iint_{x^2+y^2\le R^2}1\,|r_x\times r_y|\,dx\,dy=\iint_{x^2+y^2\le R}1\sqrt{2}\,dx\,dy=$$

$$=\sqrt{2}\pi R^2$$

__דוגמא ב:__

חשבו את $\int_{S_R^2}(x^2+y^2)z^2\,dV$ כאשר $S_R^2=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2=R^2\}$

__פתרון__

פרמטריזציה:
$$\begin{cases} x=R\cos\theta\sin\phi\\ y=R\sin\theta\sin\phi\\ z=R\cos\phi\end{cases}$$

$$r_\theta=(-R\sin\theta\sin\phi,\ R\cos\theta\sin\phi,\ 0)$$

$$r_\phi=(-R\cos\theta\cos\phi,\ R\sin\theta\cos\phi,\ -R\sin\phi)$$

$$r_\theta\times r_\phi=(-R\cos\theta\sin^2\phi,\ -R\sin\theta\sin^2\phi,\ -R\cos\phi\sin\phi)$$

$$|r_\theta\times r_\phi|=\underbrace{R^2}_{\text{קבוע}}\sin\phi$$

נחשב:
$$\int_{S_R^2}(x^2+y^2)z^2\,dV=\int_0^\pi\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{(R^2\cos^2\theta\sin^2\phi+R^2\sin^2\theta\sin^2\phi)}_{x^2+y^2=R^2\sin^2\phi}\cdot$$

$$\cdot\underbrace{R^2\cos^2\phi}_{z}\cdot\underbrace{R^2\sin\phi}_{|r_\theta\times r_\phi|}\,d\theta\,d\phi=R^6\cdot 2\pi\int_0^\pi\cos^2\phi\sin^3\phi\,d\phi=$$

$$=R^6\,2\pi\int_0^\pi\cos\phi\,d\frac{\sin^4\phi}{4}=\dots=\frac{4\pi R^6}{15}$$

אינטגרציה בחלקים

דוגמא ב-$\mathbb{R}^4$

חשבו את השטח של M $\quad M=\{(x,y,u,v):\underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{1-\lambda}+\underbrace{\sqrt{u^2+v^2}}_{\lambda}=1\}$

פתרון

הצגה פרמטרית:

$$r(\lambda,\theta,\varphi)\begin{cases}x=(1-\lambda)\cos\theta\\ y=(1-\lambda)\sin\theta\\ u=\lambda\cos\varphi\\ v=\lambda\sin\varphi\end{cases}$$

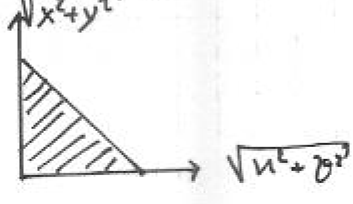
תחום: $0<\lambda<1 \qquad -\pi<\theta,\varphi<\pi$

$$r_\lambda=(-\cos\theta,-\sin\theta,\cos\varphi,\sin\varphi)$$
$$r_\theta=((\lambda-1)\sin\theta,(1-\lambda)\cos\theta,0,0)$$
$$r_\varphi=(0,0,-\lambda\sin\varphi,\lambda\cos\varphi)$$

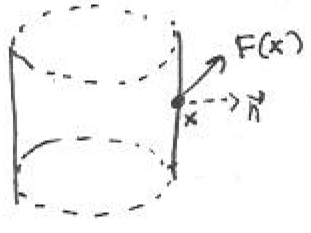
$$\left.\begin{array}{l}|r_\lambda|^2=\langle r_\lambda,r_\lambda\rangle=2\\ |r_\theta|^2=(1-\lambda)^2\\ |r_\varphi|^2=\lambda^2\\ \langle r_\theta,r_\varphi\rangle=0\\ \langle r_\theta,r_\lambda\rangle=0\\ \langle r_\varphi,r_\lambda\rangle=0\end{array}\right\}\quad \Gamma(r_\lambda,r_\theta,r_\varphi)=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&(1-\lambda)^2&0\\0&0&\lambda^2\end{vmatrix}=2(1-\lambda)^2\lambda^2$$

$$\underset{\text{שטח של } M}{Vol(M)}=\int_M 1\,dV=\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{2\lambda^2(1-\lambda)^2}\,d\lambda\,d\theta\,d\varphi=$$

$$=4\pi^2\int_0^1\sqrt{2}\lambda(1-\lambda)\,d\lambda=\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi^2$$



שטף של שדה וקטורי



$F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ מתאר לנו את הזרימה

בכל נקודה בוחרים איך לבחור את הוקטור

שטף - כמה זרם יוצא החוצה או נכנס פנימה.

נעשה נורמל למשטח. $\langle F,\vec n\rangle$ מראה לנו האם זרם יוצא או נכנס.

אז: $\phi_M(F)=\int_M \langle F,n\rangle dV$ שטף של F דרך M

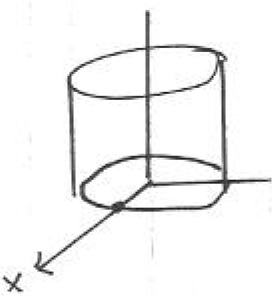
כאשר $\vec{n}$ נורמל חיצוני

<u>הערה</u>: בבחירת נורמל חיצוני יש לבדוק רק בנקודה בודדת על המשטח ולראות האם הנורמל יוצא החוצה / נכנס פנימה. בחירה של +/- מתאים בנקודה אחת מתאים גם לכל M.

דוגמא של הגליל: $\vec{n}(x,y,z)=\left(\frac{x}{R},\frac{y}{R},0\right)$

נבדוק למשל ב $(R,0,0)$ שהיא על הגליל

$$\vec{n}(R,0,0)=\pm(1,0,0)$$



+ זוהי הבחירה של הנורמל החיצוני ולכן:

$$\vec{n}=\left(\frac{x}{R},\frac{y}{R},0\right)$$