

פונקציה גאמא

אפשר $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx$

האינטגרל $s > 0$

$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$

היחס בין הפונקציה גאמא לבין פונקציית פאיי

$\Gamma(n+1) = n!$

כאשר n הוא מספר טבעי

$\lim_{s \rightarrow 0} s\Gamma(s) = 1$

$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1$

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx = 2 \int_0^\infty e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$
 $u = \sqrt{x} \leftarrow$
 $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

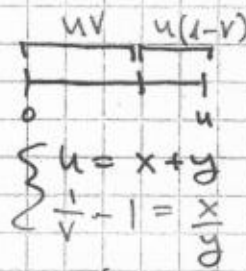
פונקציה ביטא

$\beta(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$

$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx \int_0^\infty y^{\beta-1} e^{-y} dy =$

הפונקציה:

$= \int_0^\infty \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} y^{\beta-1} e^{-y} dx dy =$ (*)



$\begin{cases} x = u(1-v) \\ y = uv \\ 0 \leq v \leq 1 \\ u \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} u = x+y \\ \frac{1}{v} - 1 = \frac{x}{y} \end{cases}$

כאשר $y \geq 0$ $x \geq 0$ $u \geq 0$ $0 \leq v \leq 1$

$|J| = \det \begin{pmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{pmatrix} = u(1-v) + uv = u$

$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \int_0^1 \int_0^\infty \underbrace{(u(1-v))^{\alpha-1}}_x \underbrace{(uv)^{\beta-1}}_y \underbrace{e^{-u}}_{e^{-(x+y)}} u du dv =$
 $= \int_0^1 (1-v)^{\alpha-1} v^{\beta-1} dv \int_0^\infty u^{\alpha+\beta-1} e^{-u} du = \beta(\alpha, \beta) \Gamma(\alpha+\beta)$

גאומטריה

(**) = $\int_0^{\pi/2} \sin^{\alpha-1} \theta \cos^{\beta-1} \theta d\theta$ כאשר $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$

הפונקציה:

$$** = \int_0^{\pi/2} (\sin^2 \theta)^{\frac{\alpha}{2}-1} (\cos^2 \theta)^{\frac{\beta}{2}-1} \sin \theta \cos \theta d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/2} (\sin^2 \theta)^{\frac{\alpha}{2}-1} (1 - \sin^2 \theta)^{\frac{\beta}{2}-1} \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{2}} d\theta = \xrightarrow{u = \sin^2 \theta}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 u^{\frac{\alpha}{2}-1} (1-u)^{\frac{\beta}{2}-1} du = \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2}) \Gamma(\frac{\beta}{2})}{2} =$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2}) \Gamma(\frac{\beta}{2})}{2 \Gamma(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2})}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{\alpha-1} \theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^{\alpha-1} \theta d\theta = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{\alpha}{2})}{2 \Gamma(\frac{1+\alpha}{2})} = \text{: formula}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})}$$

$$\int_{x_1, \dots, x_n \geq 0} \dots \int x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \dots x_n^{p_n-1} dx_1 \dots dx_n = \frac{\Gamma(p_1) \Gamma(p_2) \dots \Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1 + p_2 + \dots + p_n + 1)}$$

$$\sum_{i=1}^n x_i \leq 1$$

$$p_1 \dots p_n > 0$$

כאשר

$$\int \dots \int x_1^{p_1-1} \dots x_n^{p_n-1} dx_1 \dots dx_n =$$

$$x_1 \dots x_n \geq 0$$

$$\sum x_i \leq 1$$

$$\left(\begin{matrix} p_i > 0 \\ x_i > 0 \end{matrix} \right)$$

$$= \left[\begin{matrix} \text{change of variables} \\ y_i = x_i \delta_i \end{matrix} \right] = \frac{\Gamma(\frac{p_1}{\delta_1}) \dots \Gamma(\frac{p_n}{\delta_n})}{\delta_1 \dots \delta_n \Gamma(\frac{p_1}{\delta_1} + \dots + \frac{p_n}{\delta_n} + 1)}$$

$$\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_n = \delta \geq 1$$

$$p_1 = p_2 = \dots = p_n = 1$$

כאשר

$$\int \dots \int 1 dx_1 \dots dx_n = \frac{\Gamma(\frac{1}{\delta})^n}{\delta^n \Gamma(\frac{n}{\delta} + 1)}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^n x_i \leq 1$$

$$B_p^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_p \leq 1\} =$$

כדור יחידה ל-norm p

$$= \{x \in \mathbb{R}^n : \sum |x_i|^p \leq 1\}$$

נחשב את נפח

$$\text{Vol}(B_p^n) = \frac{2^n \Gamma(\frac{1}{p})^n}{p^n \Gamma(\frac{n}{p} + 1)}$$

: formula

$$\sqrt{\pi} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2} + 1)}$$

$$= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$$

: נפח יחידה ב- B_2^n

כדור היחידה

במקרה של norm 1, נקרא σ^n את נפח היחידה ל-norm 1

$$\text{Vol}(B_1^n) = \frac{2^n}{n!} = 2^n \text{Vol}(\sigma^n)$$

: formula

א.ב.ע

$$\sigma^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0 \text{ for } 1 \leq i \leq n, \sum x_i \leq 1\}$$

אנחנו נסתכל בריבוע:

$$\int \dots \int \prod_{i=1}^n x_i^{p_i-1} dx_1 \dots dx_n = \frac{\Gamma(p_1) \dots \Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1 + \dots + p_n + 1)}$$

$x_1, \dots, x_n \geq 0$
 $\sum x_i \leq 1$

הוכחה באינדוקציה על n

$$\int_0^1 x^{p-1} dx = \beta(p, 1) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(1)}{\Gamma(p+1)} = \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+1)}$$

$0 \leq x \leq 1$
 $(1-x)^{1-1}$

$n=1$

נניח $k-1$ נכון - הוכחה k נכון

$$I_{n+1} = \int \dots \int \prod_{i=1}^{n+1} x_i^{p_i-1} dx_1 \dots dx_{n+1} =$$

$x_1, \dots, x_{n+1} \geq 0$
 $\sum_{i=1}^{n+1} x_i \leq 1$

נבדוק עבור $n+1$

$$= \int_0^1 x_{n+1}^{p_{n+1}-1} dx_{n+1} \int \dots \int \prod_{i=1}^n x_i^{p_i-1} dx_1 \dots dx_n = (***)$$

$x_1, \dots, x_n \geq 0$
 $\sum_{i=1}^n x_i \leq 1 - x_{n+1}$

באינטגרל הפנימי

$$x_i = (1-x_{n+1})u_i \Rightarrow \prod_{i=1}^n dx_i = (1-x_{n+1})^n du_1 \dots du_n$$

באינטגרל הפנימי נשתמש בהחלפה

$$(***) = \int_0^1 x_{n+1}^{p_{n+1}-1} \int \dots \int \left[\prod_{i=1}^n u_i (1-x_{n+1})^{p_i-1} \right] (1-x_{n+1})^n du_1 \dots du_n =$$

$u_1, \dots, u_n \geq 0$
 $\sum u_i \leq 1$

$$= \int_0^1 x_{n+1}^{p_{n+1}-1} (1-x_{n+1})^{\sum_{i=1}^n p_i - n} \int \dots \int \prod_{i=1}^n u_i^{p_i-1} du_1 \dots du_n =$$

$u_i \geq 0$
 $\sum u_i \leq 1$

$$= I_n \int_0^1 x_{n+1}^{p_{n+1}-1} (1-x_{n+1})^{\sum_{i=1}^n p_i - n} dx_{n+1} = I_n \beta(p_{n+1}, \sum_{i=1}^n p_i + 1) =$$

$$= \frac{\Gamma(p_1) \dots \Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1 + \dots + p_n + 1)} \cdot \frac{\Gamma(p_{n+1}) \Gamma(\sum_{i=1}^n p_i + 1)}{\Gamma(\sum_{i=1}^{n+1} p_i + 1)}$$

הוכחה באינדוקציה על n

הוכחה קטנה

$$\gamma: [a, b] \rightarrow D \in \mathbb{R}^n$$

$\vec{F}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ (פונקציה וקטורית)

$(F_1, \dots, F_n)$

$$\sum_{i=1}^n \int_a^b F_i dx_i = \int_a^b \sum_{i=1}^n F_i(\gamma(t)) \gamma_i'(t) dt = \text{☺}$$

$\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$

נשתמש בזה

$$\text{☺} = \int_a^b \langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

$\gamma'(t) = (x_1'(t), \dots, x_n'(t))$

אורך הווקטור $\gamma'(t)$ הוא $|\gamma'(t)|$ וזהו המרחק בין הנקודות $\gamma(t)$ ו- $\gamma(t+dt)$

אנטיגרל :

אם γ מסלול פרמטריזציה (לא שניוני כיוון הפרמטריזציה) אזי האינטגרל לא משתנה.

שניוני פרמטריזציה $\gamma: [c, d] \xrightarrow{\text{הפוך}} [a, b]$ אזיכיה.

$$b > a \iff \gamma \text{ מונוטונית עולה} \iff \gamma(c) = a, \gamma(d) = b$$

$$\Gamma(t) = \gamma(\varphi(t)) \quad \text{אנטיגרל}$$

$$\Gamma: [c, d] \xrightarrow{\varphi} [a, b] \xrightarrow{\gamma} D$$

$$\int_{\Gamma} \sum_{i=1}^n F_i dx_i = \int_c^d \sum_{i=1}^n F_i(\Gamma(t)) [\gamma_i(\varphi(t))] dt = \int_c^d \sum_{i=1}^n F_i(\gamma(\varphi(t))) \varphi_i'(t) \varphi_i'(\varphi(t)) dt$$

$$\int_{\gamma} \sum_{i=1}^n F_i dx_i = \int_{a=b(c)}^{b=\varphi(d)} \sum_{i=1}^n F_i(\gamma(u)) \varphi_i'(u) du = \int_{\gamma} \sum_{i=1}^n F_i dx_i$$

אם γ היא פרמטריזציה של γ אזי $\gamma = \gamma \circ \varphi$ ו- $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ היא הפונקציה $\varphi(t) = \gamma^{-1}(\gamma(\varphi(t)))$.

בלייב

ע"פ $\gamma: [a, b] \rightarrow D \subseteq \mathbb{R}^n$ ניקח אנטיגרל $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$

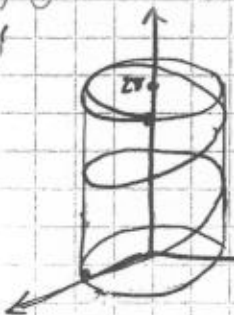
$$(\gamma)(t) = \gamma(b - (b-a)t)$$

$$\int_{\gamma} \sum_{i=1}^n F_i dx_i = - \int_{\gamma} \sum_{i=1}^n F_i dx_i \quad \text{אם } \gamma'(t) < 0$$

אנטיגרל

אם γ מסלול פרמטריזציה (helix) אזי $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$

$$\int -y dx + x dy + \frac{z}{x^2+y^2} dz \quad \text{אם } \gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$



$$\begin{aligned} \int_{\gamma} -y dx + x dy + \frac{z}{x^2+y^2} dz &= \int_0^{2\pi} \langle (-x(t), x(t), \frac{z(t)}{x^2(t)+y^2(t)}), (x'(t), y'(t), z'(t)) \rangle dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \langle (-a \sin t, a \cos t, \frac{bt}{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t}), (-a \sin t, a \cos t, b) \rangle dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + \frac{b^2 t}{a^2}) dt = (a^2 t + \frac{b^2 t^2}{2a^2}) \Big|_0^{2\pi} = \\ &= 2\pi a^2 + \frac{2\pi^2 b^2}{a^2} \end{aligned}$$

משפט גרין

(מקרה של $d=2$ במשפט סטוקס)
(זהו מקרה מיוחד)

יהי Ω תחום חסום של המישור. γ מעקפת את התחום הפנימי:
א. γ מסלול C' רגולרי

ב. הקבוצה $\{t: y(t) = b\}$ היא או 2 נקודות או $\emptyset$
(נקודה היחידה לא מופיעה על המעקף).



א. γ מסלול אנטי-שעון. חוקי גרין. כלומר, γ התחום Ω נמצא לימין.



אם $C'(\Omega)$, F אז

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

דוגמה

שליש טרפז: $\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$ כאשר Ω הוא משולש היקף הקו:

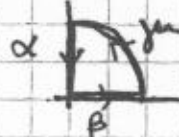
פתרון

$$\int_{\gamma} \underbrace{(-3x^2 y + y^3 e^x)}_P dx + \underbrace{(3y^2(x + e^x))}_Q dy$$

כאשר γ מסלול $x^2 + y^2 = 1$ נגד השעון. נקודות $(0,1)$ ו- $(1,0)$ הן חיתוכים.



אם γ מסלול נגד השעון:



$\alpha: [(0,1), (0,0)]$
 $\beta: [(0,0), (1,0)]$

התחום $D = \{(x,y) : x, y > 0, x^2 + y^2 < 1\}$ הוא התחום המסומן. (אם α ו- β).

כל המסלולים γ מקיפים את Ω נגד השעון.

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy = \int_{\alpha} P dx + Q dy + \int_{\beta} P dx + Q dy + \int_{\gamma} P dx + Q dy$$

כלומר $\gamma = \alpha + \beta + \gamma$

$$I = \iint_D 3x^2 + 3y^2 dx dy = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 3r^2 r dr = \frac{3\pi}{8}$$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = 3y^2(1+e^x)$
 $\frac{\partial P}{\partial y} = -3x^2 + 3y^2 e^x$

$$II = \int_0^1 [P(0, 1-t) \cdot 0 + Q(0, 1-t) (-1)] dt = \int_0^1 3(1-t)^2 (-1) dt = -1$$

$\alpha(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-t \end{pmatrix}$
 $x(t) \quad y(t)$
 $(1-t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha(t)$
 $\alpha'(t) = (0, -1)$

$$III = 0$$

$0 \leq t \leq 1$
 $\beta(t) = (t, 0)$
 $\beta'(t) = (1, 0)$
 $P(t, 0) = 0$
 $-t \cdot 0$

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\alpha} P dx + Q dy = \frac{3\pi}{8} - (-1 + 0) = \frac{3\pi}{8} + 1$$

שימוש נוסף: חישוב פוטנציאל
 $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 1$ מתקיים עבור $F = (P, Q)$
 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

$\int_{\partial \Omega} P dx + Q dy = \iint_{\Omega} 1 dx dy = \text{Vol}(\Omega)$

נמצא פונקציות P ו- Q כך שיהיו:

$$P = -y, \quad Q = 0$$

$$\int_{\partial \Omega} -y dx = \text{Vol}(\Omega)$$

או:

$$P = 0, \quad Q = x$$

$$\int_{\partial \Omega} x dy = \text{Vol}(\Omega)$$

או:

$$Q = \frac{1}{2}x, \quad P = -\frac{1}{2}y$$

$$\frac{1}{2} \int_{\partial \Omega} -y dx + x dy = \text{Vol}(\Omega)$$

נמצא את הפונקציה $\alpha(t)$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cos t + 2 \sin t \\ 2 \cos t + \sin t \end{pmatrix}$$

נמצא את המטריצה A

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$