

הנדסה מתמטית

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

או להתחיל עם חסום או לפונקציה חסומה.

$$\iint_{B(0,1)} \ln(x^2+y^2) dx dy$$

זמנה:

הוכחה

הוכחה:

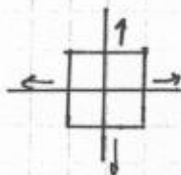
$\{\Omega_m\}$ היא מנייה של Ω וזו קבוצה סובבית אם מתקיים: (הנחה):

א. $\Omega_m \subseteq \Omega_{m+1} \subseteq \Omega$ כל m טבעי

ב. Ω_m קבוצה סובבית כל m

ג. $\bigcup_m \Omega_m = \Omega$ $\Omega_m \uparrow \Omega$

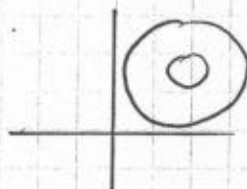
דוגמאות



$Q_n = [-n, n] \times [-n, n]$ (א)

$Q_n \uparrow \mathbb{R}^2$

$B(0, n) = \{x \mid |x| < n\}$ (ב)



$\Omega_n = B(a, 1) \setminus B(a, 1/n)$ (ג)

$\Rightarrow \Omega_n \uparrow B(a, 1)$

משפט

יהי Ω תחום סובבית $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרלית יחידה על מנייה $\{\Omega_m\}$ של Ω וזו קבוצה סובבית מתקיים: $\int_{\Omega} f dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega_m} f dx$
שני כיוונים האינטגרל שווים

הוכחה

שלב א': ראשית נראה $\mathcal{V}_0(\Omega_m) \rightarrow \mathcal{V}_0(\Omega)$ $m \rightarrow \infty$

Ω תחום סובבית $\Leftarrow$ א. Ω קומפקטית (כי Ω חסומה) $\Leftarrow$ מתחילת הוכחה
ב. Ω מפתח אחד

יהי $\epsilon > 0$ נתון $N = N(\epsilon)$ כך לכל $n \geq N$ מתקיים: $\mathcal{V}_0(\Omega) - \mathcal{V}_0(\Omega_n) < \epsilon$

על מנת אדם וקטן Ω קבוצה פתוחה $A_1, \dots, A_n$ כך $\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i = U$
 $\mathcal{V}_0(U) \leq \sum_{i=1}^n \mathcal{V}_0(A_i) < \epsilon$

על מנת $\Omega \subseteq U \subseteq \bigcup_{i=1}^n \Omega_i$ וקטן Ω קומפקטית קיים n כיווני סופי
 $U, \Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \Omega_i \subseteq \Omega_N \subset \Omega_{N+1} \subset \dots \subset \Omega_K \quad \text{אנדרגט}$$

$$\bar{\Omega} \subset \bigcup \Omega_N \subseteq \bigcup \Omega_K \quad : \forall K > N$$

$$|\Omega| - |\Omega_K| \leq |\bar{\Omega} \setminus \Omega_K| \leq |\Omega \setminus \Omega_K| \leq |\Omega \setminus \Omega_N| < \varepsilon$$

על פני Ω $|f| \leq M$ לכל f $\in L^\infty(\Omega)$ $\Rightarrow$ f אינטגרלית על Ω

$$\int_{\Omega} f dx = \int_{\Omega \setminus \Omega_m} f dx + \int_{\Omega_m} f dx \quad (*)$$

I II

$$|I| \leq \int_{\Omega \setminus \Omega_m} |f| dx \leq M |\Omega \setminus \Omega_m| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \quad \text{כי} \quad I \rightarrow 0$$

$$\int_{\Omega} f dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega_m} f dx \quad \text{כאשר} \quad m \rightarrow \infty \quad (*)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega_m} f dx = \int_{\Omega} f dx$$

*** נראה של f אינטגרלית $\Rightarrow$ f מדידתה

פונקציה

ככה נחשב אינטגרל f על Ω

דוגמה

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega_m} f dx = \int_{\Omega} f dx \quad \text{אם} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega_m} f dx = \int_{\Omega} f dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$$

*** $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$

$$\Omega_n = [-n, n] \uparrow \mathbb{R} \quad \text{קנה מידה}$$

$$\int_{\Omega_n} \frac{x}{1+x^2} dx = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\Omega_n = [-n, 2n] \quad \text{נניח: } n \rightarrow \infty$$

$$\int_{\Omega_n} \frac{x}{1+x^2} dx = \int_{-n}^{2n} \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_{-n}^{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln 2$$

הגבול $\ln 2$ $\Rightarrow$ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = \ln 2$

משפט

אם $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ $\leq f$ $\leq g$ $\Rightarrow$ $\int_{\Omega} f dx \leq \int_{\Omega} g dx$ $\Rightarrow$ $\int_{\Omega} f dx \in [0, \infty]$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega_m} f dx = \int_{\Omega} f dx \in [0, \infty] \quad \{\Omega_m\}$$

הוכחה

$$A \leq B \quad \int_{\Omega_m} f dx \rightarrow B$$

$$\int_{\Omega_m} f dx \rightarrow A$$

אם f אינטגרלית על Ω'_k $\Rightarrow$ $\int_{\Omega'_k} f dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega'_k \cap \Omega_m} f dx$

אם f אינטגרלית על Ω'_k $\Rightarrow$ $\int_{\Omega'_k} f dx \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega'_k \cap \Omega_m} f dx$

כאן שטחן האתחון הא מתיאור f והתוצאה $\Omega'_k \cap \Omega_m \uparrow \Omega'_k$
 כיסוי $\Omega'_k \cap \Omega_m \subseteq \Omega_m$.

□ $B \geq A$ וזה'סן $B \leq A$ וזה'סן $k \rightarrow \infty$ וזה'סן .

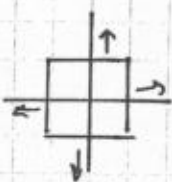
Poisson התוצאה

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad (1)$$

$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy$: זה'סן e^{-x^2} - $f(x,y) = e^{-x^2-y^2} \geq 0$ והתוצאה $\Omega_n = B(0,n) = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq n^2\}$.



$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_n} e^{-x^2-y^2} dx dy &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^n e^{-r^2} r dr d\theta = 2\pi \left(-\frac{e^{-r^2}}{2} \right) \Big|_0^n = \\ &= \pi - \pi e^{-n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi \end{aligned}$$



$$\Omega'_n = [-n, n] \times [-n, n] \quad \iint_{\Omega'_n} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_{-n}^n e^{-x^2} dx \int_{-n}^n e^{-y^2} dy \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right)^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \Leftrightarrow \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right)^2 = \pi$$

$$a > 0, \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\frac{x}{\sqrt{a}})^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-a_1 x_1^2 - a_2 x_2^2 - \dots - a_n x_n^2} dx &= \\ &= \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a_i x_i^2} dx_i = \sqrt{\frac{\pi^n}{a_1 \dots a_n}} \quad (3) \end{aligned}$$

התוצאה $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax, x \rangle} dx = \sqrt{\frac{\pi^n}{\det A}}$.

$\det(A) = \lambda_1 \dots \lambda_n$ והתוצאה $\lambda_i > 0$.

התוצאה התוצאה

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \ln(x^2+y^2) dx dy$$

התוצאה $\ln(x^2+y^2) \leq 0$. $\Omega_n = B(0,1) \setminus B(0,\frac{1}{n})$.

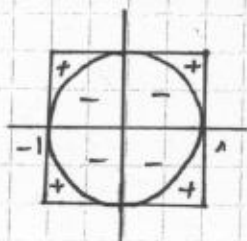
$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \iint_{B(0,1) \setminus B(0,\delta)} \ln(x^2+y^2) dx dy = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\delta}^1 (\ln r^2) r dr d\theta =$$

$$= \lim_{\delta \rightarrow 0} 2\pi \int_{\delta^2}^1 \frac{\ln n}{2} dn = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{2\pi}{2} [n \ln n - n]_{\delta^2}^1 =$$

$$= \frac{2\pi}{2} (0 - 1 - \delta^2 \ln \delta^2 - \delta^2) = -\frac{2\pi}{2} = -\pi$$

הוכחה של המאמר

$$D = \{x, y\} : \max(|x|, |y|) \leq 1\}$$



$$\iint_D \ln(x^2+y^2) dx dy \text{ של } \ln(x^2+y^2) \text{ על } D$$

$$\iint_{B(0,1)} \ln(x^2+y^2) dx dy = -\pi$$

$$D = \{x, y\} : x^2 + y^2 \leq 2$$

$$\ln(x^2+y^2) \leq \ln 2$$

$$\leq \ln(2) \text{Vol}(D \setminus B(0,1)) =$$

$$= \ln(2) [4 - \pi] < \pi$$

$$\text{Sign} \left(\iint_D \ln(x^2+y^2) dx dy \right) = -1$$

$$\alpha > 0 \quad f(x) = |x|^{-\alpha} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R}^d \setminus B = B^c \quad B = B(0,1)$$

$$B = \{x : |x| < 1\}$$

$$B^c = \{x : |x| \geq 1\}$$

$$(\lim \neq 0 \text{ של } f(x)) \text{ של } f(x) \text{ של } f(x)$$

$$E_n = \{x : 2^{-(n+1)} < |x| < 2^{-n}\} \quad n=0,1,2,\dots$$

$$\Omega_n = \bigcup_{k=0}^n E_k = B(0,1) \setminus B(0,2^{-(n+1)})$$

$$2^{n\alpha} \leq f(x) = \frac{1}{|x|^\alpha} \leq 2^{\alpha(n+1)}$$

$$2^{n\alpha} \text{Vol}(E_n) \leq \int_{E_n} f dx \leq 2^{\alpha(n+1)} \text{Vol}(E_n)$$

$$r \approx 2^{-n}$$

$$\text{Vol}(B(0,r)) = C_d r^d$$

$$C_2 2^{-kn} \leq \text{Vol}(E_n) \leq C_1 2^{-kn}$$

5) $C_1, C_2 > 0$

$$V_0(E_n) = V_0(B(0, 2^{-n}) - V_0(B(0, 2^{-(n+1)}))$$

$$C_2 2^{\alpha n - d n} \leq \int_{E_n} f dx \leq C_1 2^{\alpha(n+1) - d n}$$

$$C_2 2^{(\alpha-d)n} \leq \int_{E_n} f dx \leq C_1 2^{(\alpha-d)n}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{E_k} f dx$$

המשפט הראשון. $\sum 2^{(\alpha-d)n}$ מתכנס אם $\alpha-d < 0$ כלומר $\alpha < d$ (i)

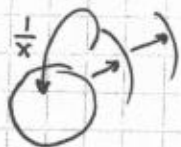
אם $\alpha-d < 0$ כלומר $\alpha < d$ אז $\sum 2^{(\alpha-d)n} < \infty$ ולכן $\int_{\mathbb{R}^n} f dx < \infty$ (i)

אם $\alpha-d > 0$ כלומר $\alpha > d$ אז $\sum 2^{(\alpha-d)n} = \infty$ ולכן $\int_{\mathbb{R}^n} f dx = \infty$ (ii)

אם $\alpha-d = 0$ כלומר $\alpha = d$ אז $\sum 2^{(\alpha-d)n} = \sum 1 = \infty$ ולכן $\int_{\mathbb{R}^n} f dx = \infty$ (iii)

$$\left[\begin{array}{l} R = R' \\ \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx \end{array} \right]$$

המשפט הראשון. $\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x|^2} dx$ מתכנס אם $\alpha < 3$ כלומר $\alpha < 3$ (i)



$$f(x) = |x|^{-\alpha}$$

$$\Delta \left(\frac{1}{|x|^2} \right) = 0$$

$$x \in B^c \text{ for } B \subset \mathbb{R}^3$$

$$|x|^{-\alpha} \rightarrow |x|^{-\alpha}$$

המשפט הראשון. $\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x|^2} dx$ מתכנס אם $\alpha < 3$ כלומר $\alpha < 3$ (i)

$$d > \alpha \quad d - \alpha < 0 \quad f_2 = |x|^{-\alpha} = |x|^{-(d-\alpha)}$$

המשפט הראשון. $\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x|^2} dx$ מתכנס אם $\alpha < 3$ כלומר $\alpha < 3$ (i)

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f| dx, \int_{\mathbb{R}^n} f dx$$

$$\int_{|x|>1} \frac{1}{|x|^{10}+1} dx \quad \mathbb{R}^9$$

$$\frac{1}{|x|^{10}+1} \leq \frac{1}{|x|^{10}}$$

$$\int_{|x|>1} \frac{1}{|x|^{10}} dx < \infty \quad 10 > 9 = d$$

$$\mathbb{R}^n = \{1 < |x| < n\} \rightarrow |x| > 1 \quad \int_{|x|>1} \frac{1}{|x|^{10}+1} dx$$

$$\int_{|x|>1} \frac{1}{|x|^{10}+1} dx$$

