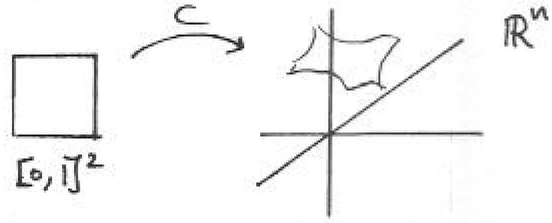
<u>הגדרה</u>

תהי $A \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה

העתקה רציפה $c:[0,1]^k \to A$ היא n-תיבה סינגולרית (a singular n-cube)



בד"כ נעסוק בתיבות סינגולריות שהן בנוסף גזירות (או C^∞)

<u>דוגמא</u>

התיבה הסינגולרית $I^k(x_1 \dots x_k) = (x_1 \dots x_k)$

נקראת התיבה הסטנדרטית.

עבור $k=0$ תיבה סינגולרית היא פשוט נקודה $c(0) = P \in A$.

<u>הגדרה</u>

נגדיר k-שרשרת סינגולרית כסכום סופי פורמלי של k תיבות סינגולריות עם מקדמים שלמים.

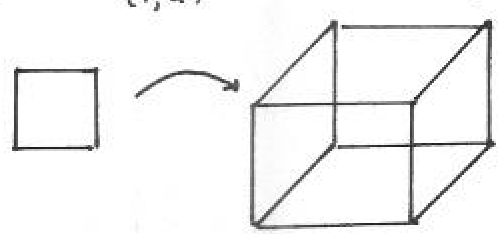
לדוגמא: $3c_1 + 2c_2 + 13c_3$

$$I^n : [0,1]^n \to [0,1]^n \subset \mathbb{R}^n$$

נגדיר $\partial I^n : [0,1]^{n-1} \to [0,1]^n \subset \mathbb{R}^n$ באופן הבא לכל $1 \le i \le n$ ו $\alpha = 0,1$

$I_{(i,\alpha)}(x^1, \dots, x^{n-1}) = (x^1, \dots, x^{i-1}, \alpha, x^{i+1}, \dots, x^{n-1})$ כלומר השפה של התיבה הסטנדרטית:

$$\partial I^n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{i+\alpha} I^n_{(i,\alpha)}$$



$$I^3_{(1,0)}(x^1, x^2) = (0, x^1, x^2)$$
$$I^3_{(1,1)}(x^1, x^2) = (1, x^1, x^2)$$

עבור תיבה סינגולרית $c:[0,1]^n \to A$ נגדיר את הפן ה-(i,α) ע"י:

$$c_{(i,\alpha)} = c \circ I^n_{(i,\alpha)}$$
$$\partial c = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{i+\alpha} c_{(i,\alpha)}$$

ולבסוף עבור שרשרת סינגולרית $\sum_{i=1}^{N} a_i c_i$ כאשר c_i תיבות סינגולריות נגדיר:

$$\partial c = \partial\left(\sum_{i=1}^{n} a_i c_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \partial c_i$$

טענה

$\partial^2=0$ כלומר לכל שרשרת סינגולרית C (מספיק להראות זאת עבור קוביה סינגולרית)
$\partial(\partial C)=0$.

הוכחה: תרגיל. (ההוכחה כתובה בספר של ספיבק).

מעתה נניח כי כל השרשראות הסינגולריות הן C^∞.

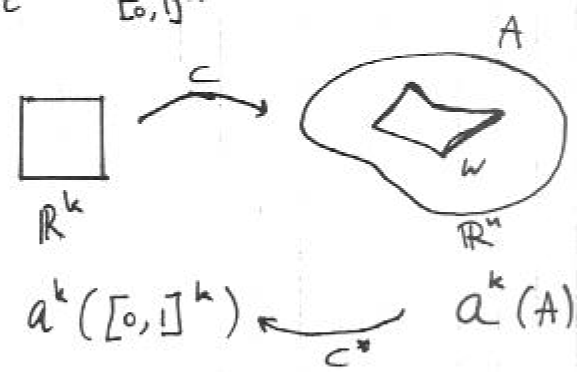
הגדרה

יהי w k-תבנית דיפרנציאלית על $[0,1]^k$ (ולכן מן הצורה $f dx^1\wedge\ldots\wedge dx^k$)

נגדיר: $\int_{[0,1]^k} w = \int_{[0,1]^k} f\, dx^1\ldots dx^k$ ניתן לכתוב זאת גם בצורה הבאה: $\int_{[0,1]^k} f\, dx^1\wedge\ldots\wedge dx^k$

יהי $C:[0,1]^k\to A\subset\mathbb{R}^n$ קוביה סינגולרית ותהי $w\in \Omega^k(A)$ תבנית דיפרנציאלית על A. נגדיר:

$$\int_C w = \int_{[0,1]^k} C^* w$$



הערה

אם $k=0$ אז $\int_C w = w(C(0))$

w היא תבנית מסדר אפס, ולכן פונקציה.

לבסוף עבור k שרשרת סינגולרית $C=\sum_{i=1}^N a_iC_i$ נגדיר $\int_C w=\sum_{i=1}^N a_i\int_{C_i} w$

דוגמאות

(1) $\int_C Pdx+Qdy = \int_{[0,1]} C^*(Pdx+Qdy)$ $\quad C:[0,1]\to\mathbb{R}^3 \quad C=(C^1,C^2)$

$\int_{[0,1]} C^*(P\cdot dx) = \int (P\circ C)\underbrace{\frac{dC^1}{dt}(t)\,dt}_{C^*(dx)}$ כנ"ל לגבי Q.

(2) יהי $C:[0,1]^2\to \mathbb{R}^3 \quad C=(C^1,C^2,C^3)$

$$\int_C P\,dx\wedge dy = \int_{[0,1]^2}(P\circ C)\left(C^*(dx)\wedge C^*(dy)\right) =$$

$$= \int_{[0,1]^2}(P\circ C)\left(\frac{\partial C^1}{\partial s}ds + \frac{\partial C^1}{\partial t}dt\right)\wedge\left(\frac{\partial C^2}{\partial s}ds + \frac{\partial C^2}{\partial t}dt\right) =$$

$$= \int_{[0,1]^2}(P\circ C)\left(\frac{\partial C^1}{\partial s}\frac{\partial C^2}{\partial t} - \frac{\partial C^1}{\partial t}\frac{\partial C^2}{\partial s}\right) ds\wedge dt$$

משפט stokes

תהי ω $(k-1)$-תבנית דיפרנציאלית על קבוצה פתוחה $A\subset\mathbb{R}^n$ ותהי $c:[0,1]^k\to\mathbb{R}^n$ k שרשרת סינגולרית אזי

$$\int_c d\omega=\int_{\partial c}\omega$$

הוכחה:

נניח תחילה כי $c=I^k$ הקוביה הסטנדרטית $(n=k)$; ω $(k-1)$-תבנית על $[0,1]^k$

נוכל להניח כי $\omega=f\,dx^1\wedge\ldots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\ldots\wedge dx^k$

נשים לב לכך ש

$$\int_{[0,1]^{k-1}}(I^k_{(j,\alpha)})^*(f\,dx^1\wedge\ldots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\ldots\wedge dx^k)=\begin{cases}0 & i\neq j\\ \int_{[0,1]^k}f(x^1,\ldots,x^{i-1},\alpha,x^{i+1},\ldots,x^k)\,dx^1\ldots dx^k & ⊛\end{cases}$$

⊛ שקול ל $\int_{[0,1]^k}f(x^1,\ldots,x^{i-1},\alpha,x^i,\ldots,x^k)\,dx^1\ldots dx^k$

נזכיר ש $I^k_{(j,\alpha)}:[0,1]^{k-1}\to[0,1]^k$

$$I^*_{(j,\alpha)}:\Omega^{k-1}([0,1]^k)\to\Omega^{k-1}([0,1]^{k-1})$$

$i\neq j$ והסבר למקרה שבו $\to$

$$(f\circ I^k_{(j,\alpha)})(x^1,\ldots,x^{k-1})=(x^1,\ldots,\alpha,\ldots,x^{k-1})$$

$$\left(\begin{array}{l}f^*(dx^l)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f^l}{\partial x^i}dx^i\\ f=(f^1\ldots f^l\ldots f^n)\end{array}\right)$$

$$(f\circ I^k_{(j,\alpha)})^i\equiv\alpha$$

אם $i=j$: $g=(x^1,\ldots,\underset{i=j}{\alpha},x^{i+1},\ldots,x^{k-1})$

$$m\neq i\qquad g^*(dx^m)=\sum\frac{\partial g^m}{\partial x^i}dx^i\underset{m\neq i}{=}\sum\frac{\partial x^m}{\partial x^i}dx^i$$

זה שווה לאחד כאשר $m=i$ ואחרת אפס.

לכן

$$\int_{\partial I^k}\overbrace{f\,dx^1\wedge\ldots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\ldots\wedge dx^k}^{\omega}=\sum_{j=1}^k\sum_{\alpha=0,1}(-1)^{j+\alpha}\int_{[0,1]^{k-1}}(I^k_{(j,\alpha)})^*(f\,dx^1\wedge\ldots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\ldots\wedge dx^k)$$

$$=(-1)^{i+1}\int_{[0,1]^k}f(x^1,\ldots,\underset{i}{1},\ldots,x^k)\,dx^1\ldots dx^k+(-1)^i\int_{[0,1]}f(x^1,\ldots,\underset{i}{0},\ldots,x^k)\,dx^1\ldots dx^k$$

מצד שני:

$$\int_{I^k}d\omega=\int_{I^k}d(f\,dx^1\wedge\ldots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\ldots\wedge dx^k)=\int_{[0,1]^k}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i\right)\wedge dx^1\wedge\ldots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\ldots\wedge dx^k=$$

$$=(-1)^{i-1}\int_{[0,1]^k}\frac{\partial f}{\partial x^i}\,dx^1\ldots dx^k=(-1)^{i-1}\int_0^1\ldots\left(\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x^i}(x^1\ldots x^k)dx^i\right)dx^1\ldots\widehat{dx^i}\ldots dx^k$$

נחשב אינטגרל זה לפי משפט פוביני

$$=(-1)^{i-1}\left[\int_0^1\ldots\int_0^1\left(f(x^1,\ldots,1,\ldots x^k)-\int f(x^1,\ldots,0,\ldots x^k)\right)dx^1\ldots\widehat{dx^i}\ldots dx^k\right]$$

(משפט יסודי של האינטגרציה)

פעולה על הסוגריים

עבור k-קוביה סינגולרית כללית c:

$$\int_{\partial c} \omega \overset{def}{=} \int_{\partial I^k} c^* \omega$$

לכן:

$$\int_c dw = \int_{I^k} c^*(dw) = \int_{I^k} d(c^* \omega) \overset{\text{לפי המקרה שהוכחנו}}{=} \int_{\partial I^k} c^* w = \int_{\partial c} \omega$$

ולסיום אם $c = \sum_{i=1}^{N} a_i c_i$ k-שרשרת כללית נקבל:

$$\int_c dw = \sum_{i=1}^{N} a_i \int_{c_i} dw = \sum_{i=1}^{N} a_i \int_{\partial c_i} \omega = \int_{\partial c} \omega \qquad \blacksquare$$

ב $\Lambda^n(\mathbb{R}^n)$ הוא חד מימדי.

לכן לכל בסיס אורתונורמלי $\{v_1 \dots v_n\}$ $\qquad \det\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \pm 1$

$\mu = [v_1 \dots v_n]$ היא אוריינטציה

M היא יריעה אוריינטבילית — אם ניתן לבחור אוריינטציה μ_p לכל M_p באופן קונסיסטנטי.