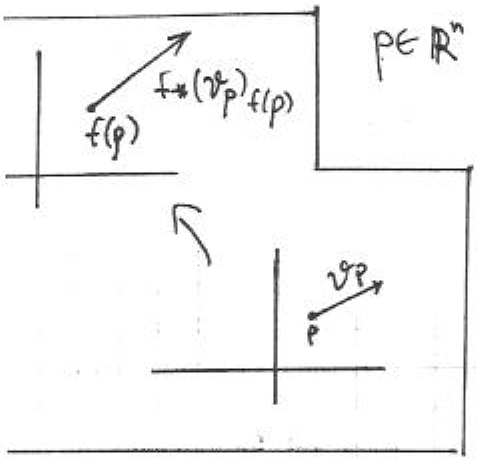
הגדרה:

$$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$



$p \in \mathbb{R}^n$

$$f_* : \mathbb{R}^n_p \to \mathbb{R}^m_{f(p)} \qquad f(p) \in \mathbb{R}^m$$

$$f_*(v_p) = \left((Df)_p(v)\right)_{f(p)}$$

נזכר ב $\mathbb{R}^2$:

$$g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$\lim \frac{g(p+tv)-g(p)}{t} = (D_v g)p$$

$$\lim \frac{g(p+te_i)-g(p)}{t} = \frac{\partial g}{\partial x^i} = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}(g)\right)(p)$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{g(p+\gamma(t))-g(p)}{t}$$

$$\gamma'(0) = v$$

$$v \longleftrightarrow v_p \cong D_v$$

$$(f^*\varphi)(v) = \varphi(f_* v) \qquad \varphi \in \left(\mathbb{R}^m_{f(p)}\right)^*$$

$$f^* : a^1\left(\mathbb{R}^m_{f(p)}\right) \to a^1\left(\mathbb{R}^n_p\right)$$

$$f^* : a^k\left(\mathbb{R}^m_{f(p)}\right) \longrightarrow a^k\left(\mathbb{R}^n_p\right)$$

$$(f^k w)\left((v_1)_p \dots (v_k)_p\right) = \omega\left((f_*(v_1)_p)_{f(p)}, \dots, (f_*(v_k)_p)_{f(p)}\right)$$

אם $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ נגדיר $(\mathbb{R}^n)^*_p \ni (df)_p(v_p) = (Df)_p(v_p)$

בפרט $dx^1, \dots, dx^n$

$$(dx^i)\left((a_1,\dots,a_n)_p\right) = (dx^i)\left(\sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = a_i \frac{\partial x^i}{\partial x^i} = a_i$$

לכן $dx^1, \dots, dx^n$ בסיס ל- $(\mathbb{R}^n_p)^*$

__תבניות דיפרנציאליות__ בנקודה $p \in \mathbb{R}^n$ מסדר k הוא איבר מהצורה:

$$\omega_p = \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le \dots \le i_k \le n} \omega_{i_1 \dots i_k}(p)\, dx_p^{i_1} \wedge \dots \wedge dx_p^{i_k}$$

$\omega_{i_1}, \dots \omega_{i_k}$ פונקציות ממשיות.

__דוגמאות:__ ב $\mathbb{R}^2$ תבנית דיפרנ' מסדר 1 נראית כך $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

ב $\mathbb{R}^3$ תבנית מסדר 2 היא מהצורה:

$$P(x,y,z)\, dx \wedge dy + Q(x,y,z)\, dx \wedge dz + R(x,y,z)\, dy \wedge dz$$

__טענה:__

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n$$

טענה

$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ דיפרנציאבילית (C^∞)

1. $f^*(dx^i)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f^i}{\partial x^j}dx^j$
2. $f^*(\omega_1+\omega_2)=f^*(\omega_1)+f^*(\omega_2)$
3. $f^*(g\cdot\omega)=(g\circ f)\,f^*(\omega)$
4. $f^*(\omega\wedge\eta)=f^*\omega\wedge f^*\eta$

הוכחת 4:

$\omega\in\Lambda^k\quad \eta\in\Lambda^l$ תבניות על $\mathbb{R}^m_{f(p)}$

$$[f^*(\omega\wedge\eta)]_p(v_1,\dots v_k,v_{k+1},\dots v_{k+l})\overset{\text{הגדרה}}{=}(\omega\wedge\eta)_{f(p)}(f_*(v_1)\dots f_*(v_k),f_*(v_{k+1})\dots f_*(v_{k+l}))$$

$$\overset{\text{הגדרה}}{=}\frac{(k+l)!}{k!\,l!}Alt(\omega\otimes\eta)_{f(p)}(f_*(v_1)\dots f_*(v_k),f_*(v_{k+1}),\dots,f_*(v_{k+l}))=$$

$$=\frac{(k+l)!}{k!\,l!}Alt(f^*\omega\otimes f^*\eta)_p=(f^*\omega\wedge f^*\eta)_p(v_1\dots v_{k+l})\quad\blacksquare$$

דוגמא

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3\qquad f=(f^1,f^2,f^3)$

$$f^*(P\,dx^1\wedge dx^2+Q\,dx^2\wedge dx^3)=(P\circ f)\,f^*(dx^1)\wedge f^*(dx^2)+(Q\circ f)\,f^*(dx^2)\wedge f^*(dx^3)$$

$$f^*(dx^1)\wedge f^*(dx^2)=\left(\frac{\partial f^1}{\partial x^1}dx^1+\frac{\partial f^1}{\partial x^2}dx^2\right)\wedge\left(\frac{\partial f^2}{\partial x^1}dx^1+\frac{\partial f^2}{\partial x^2}dx^2\right)$$

$$=(f_1^1f_2^2-f_2^1f_1^2)\,dx^1\wedge dx^2+(\qquad\qquad)\,dx^2\wedge dx^3$$

(שים: $dx^1\wedge dx^1=0$)

טענה

יהי $f:\mathbb{R}^n_p\to\mathbb{R}^n_{f(p)}$ דיפרנציאבילית אז:

$$f^*(h\,dx^1\wedge\dots\wedge dx^n_{f(p)})=(h\circ f)\det(Df)\,dx^1\wedge\dots\wedge dx^n=h(f(p))\det(Df)_p\,dx^1_p\wedge\dots\wedge dx^n_p$$

$$\omega_{f(p)}=(h\,dx^1\wedge\dots\wedge dx^n)_{f(p)}$$

הוכחה:

ידוע כי $f^*(h\cdot dx^1\wedge\dots\wedge dx^n)_{f(p)}$ היא תבנית דיפרנציאבילית מספר n ב-$\mathbb{R}^n_p$

לכן היא שווה ל-$\lambda(dx^1\wedge\dots\wedge dx^n)_p$

נחשב את התבנית ב- $(e_1)_p,\dots,(e_n)_p$

$$f^*(dx^1\wedge\dots\wedge dx^n)=dx^1\wedge\dots\wedge dx^n(f_*e_1,\dots f_*e_n)=$$

$$=(dx^1\wedge\dots\wedge dx^n)\left(\sum_{i=1}^n a_{i1}e_i,\dots,\sum_{i=1}^n a_{in}e_i\right)=$$

כאשר $(Df)_p=a_{ij}$

$$\overset{\text{הראינו בעבר}}{=}\det(a_{ij})\,dx^1\wedge\dots\wedge dx^n(e_1\dots e_n)$$

$$\Leftarrow\quad\lambda=\det(a_{ij})$$

$\blacksquare$

נגדיר אופרטור על תבניות דיפר' $d: \mathcal{A}^k(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{A}^{k+1}(\mathbb{R}^n)$ באופן הבא:

על $\mathcal{A}^0(\mathbb{R}^n) =$ (פונקציות לישר)

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

$$d: \mathcal{A}^0 \to \mathcal{A}^1$$

יהי $\mathcal{A}^k \ni \omega = \sum_{1 \le i_1 \le \dots \le i_k \le n} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$

נגדיר $d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} d\omega_{i_1 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$

<u>משפט</u>

1. $d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta$
2. $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$ $\qquad \mathcal{A}^k \ni \omega \quad \mathcal{A}^l \ni \eta$
3. $dd\omega = 0$ לכל ω
4. אם $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ אז: $f^* d\omega = d f^*(\omega)$

<u>הוכחה:</u>

1. ברור

2. נניח $\omega = f\, dx^{i_1} \wedge \dots dx^{i_k}$ (מסדר k) $\qquad \eta = g\, dx^i$ (מסדר 1) $\qquad \left(df = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i\right)$

$$d(\omega \wedge \eta) = d(fg \cdot dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^i) = (g\, df + f\, dg) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots dx^{i_k} \wedge dx^i =$$

$$= g\, df \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^i + f\, dg \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} dx^i =$$

$$= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$$

השלימו פה ההוכחה.

3. $\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots dx^{i_k}$

$$d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k}^{n} \left(\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \right) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

$$dd\omega = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k} \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} D_{\alpha,\beta}(\omega_{i_1 \dots i_k}) dx^\beta \wedge dx^\alpha \wedge dx^{i_1} \wedge \dots dx^{i_k} = 0$$

לפי שוורץ הנגזרת α, β שווה אבל יש מינוס מה wedge לכן מתאפס.

4. יהי $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ $\qquad f = (f^1, \dots, f^m)$

$f^*(dx^i) = \sum \frac{\partial f^i}{\partial x^j} dx^i$ $\qquad f^* dg = d(f^* g)$

$$f^*(dg) = f^*\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial x^i} dx^i\right) = \sum\sum \left(\left(\frac{\partial g}{\partial x^i} \circ f\right) \frac{\partial f^i}{\partial x^j} dx^j\right)$$

$$d(f^* g) = d(g \circ f) = \sum\sum \frac{\partial g}{\partial x^i} \circ f \frac{\partial f^i}{\partial x^j} dx^i$$

לפי כלל השרשרת לכן הטענה נכונה עבור פונקציות.

$$f^*(d(\omega \wedge dx^i)) = f^*(d\omega \wedge dx^i + (-1)^k \omega \wedge dd\, x^i) =$$

$$= f^*(d\omega \wedge dx^i) = f^*(d\omega) \wedge f^*(dx^i)$$

$$d(f^*(\omega \wedge dx^i)) = d(f^*\omega \wedge f^*(dx^i)) =$$

$$= d(f^*\omega) \wedge f^*(dx^i) + \underbrace{(-1)^k f^*(\omega) \wedge d f^*(dx^i)}_{\text{כי } f^*(d^2 x^i) = 0} =$$

$$= f^* d\omega \wedge f^*(dx^i)$$

מאינדוקציה.

<u>דוגמא</u>

$$d(P\,dx + Q\,dy) = dP \wedge dx + dQ \wedge dy = (P_x\,dx + P_y\,dy) \wedge dx +$$
$$+ (Q_x\,dx + Q_y\,dy) \wedge dy = (Q_x - P_y)\,dx \wedge dy$$

<u>הגדרה</u>

תבנית דיפר' ω נקראת <u>סגורה</u> אם $d\omega = 0$

(כל תבנית מהדורה η היא סגורה כי $dd\eta = d^2\eta = 0$)

תבנית ω נקראת <u>מדויקת</u> אם היא מהדורה $d\eta = \omega$

(דוגמא ω סגורה $\Leftrightarrow Q_x = P_y$).

<u>הלמה של פואנקרה</u>

בתחום כוכבי תבנית סגורה הינה מדויקת

תחום כוכבי – תחום שקיימת בו נקודה שיש לה קו שניתן לחבר לכל נקודה בשפה.