

17/1/09

22 תשרי

הוכחה

$$(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta) = \omega \wedge \eta \wedge \theta$$

$$= \frac{(k+l+m)!}{k!l!m!} \text{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \theta)$$

הוכחה: נניח $\omega, \eta, \theta \in \wedge^k V$ ונראה ש-

$$\varphi_j \in V^* = \wedge^1 V$$

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_k = \frac{(1+1+\dots+1)!}{1!1!\dots 1!} \text{Alt}(\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_k)$$

הוכחה

$$\eta \in \wedge^l(V), \omega \in \wedge^k(V) \text{ אז } \omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$$

הוכחה

הוכחה:

$$S_k \ni \pi : V^* \ni \varphi_1, \dots, \varphi_k \mapsto \varphi_k$$

$$\varphi_{\pi(1)} \wedge \dots \wedge \varphi_{\pi(k)} = (\text{sign } \pi) \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k$$

$$V^* \ni \varphi_j \text{ אז } \wedge^k(V) \ni \omega = \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k \text{ אז } \omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$$

$$V^* \ni \psi \quad \eta = \psi$$

$$\omega \wedge \eta = \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k \wedge \psi = (\text{sign } \pi) \eta \wedge \omega$$

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega \quad \text{אם } \eta = \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_l$$



הוכחה: נניח

הוכחה

$$\dim V = n$$

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n, \varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k}$$

הבסיס של $\wedge^k V$ הוא:

$$\wedge^k(V) \quad \text{מבניס בסיס}$$

$$\dim \wedge^k(V) = \binom{n}{k}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \text{הערה:}$$

$$\wedge^0(V) = \mathbb{R} \quad \text{הערה:}$$

$$\dim \wedge^n(V) = \dim \wedge^0(V) = 1$$

$$\wedge^n(V) \text{ הוא המרחב הלינירי } \omega = \det \quad V = \mathbb{R}^n$$

$$\omega(e_1, \dots, e_n) = 1$$

הוכחה

$$\omega = \sum_{j=1}^n a_{ij} \varphi_j \quad \omega \in \wedge^n(V) \quad \varphi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$$

$$\omega(w_1, \dots, w_n) = \det(a_{ij}) \omega(v_1, \dots, v_n) \quad \text{כאשר } (1 \leq i \leq n)$$

דוגמה:

$$a^n(\mathbb{R}^n) \ni \eta$$

$$\eta((a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, (a_{n1}, \dots, a_{nn})) =$$

$$= \omega\left(\sum_{j=1}^n a_{1j} v_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{nj} v_j\right)$$

ברור η הוא אכן איברי של $a^n(\mathbb{R}^n)$ ולכן קיים $\lambda \in \mathbb{R}$ כזה ש: $\eta = \lambda \det$

$$\lambda = \lambda \det(I) = \eta(e_1, \dots, e_n) = \omega(v_1, \dots, v_n) \quad \text{בפונקציה}$$

הערה:

① יהי $\omega \in a^n(V)$ אם $\{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס של V ואי $\omega(v_1, \dots, v_n) \neq 0$

חייב אז לכל $\eta \in a^n(V)$ קיים λ כזה ש: $\eta = \lambda \omega$. נקרא ω נורמליזציה.

מחלקות הנורמליזציה של $\{v_1, \dots, v_n\}$ הן $[\omega]$. נקרא ω נורמליזציה.

קריאים אוריינטציה.

ב- $\mathbb{R}^n$ אפשר לבחור את האוריינטציה של $[e_1, \dots, e_n]$ והיא נקראת האוריינטציה.

החלקים:

② $\eta \in a^n(\mathbb{R}^n)$ נניח η נורמליזציה. $\eta(v_1, \dots, v_n) = \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

$\eta = \eta_1 v_1 + \dots + \eta_n v_n$ הנה פונקציה (הערה: η היא פונקציה) $\eta(v_1, \dots, v_n) = \langle \eta, v_1 \wedge \dots \wedge v_n \rangle$

ולכן קיים $\forall \omega \in \wedge^n \mathbb{R}^n$ $\exists z$ כזה ש: $\eta(v_1, \dots, v_n) = \langle \eta, z \rangle$ (אם $\eta = \eta_1 v_1 + \dots + \eta_n v_n$)

ממילא הפונקציה של $v_1, \dots, v_n$ מתנה $n=3$ ויש המכנים

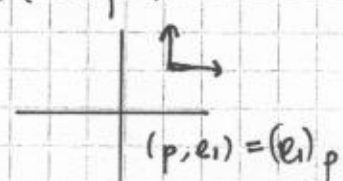
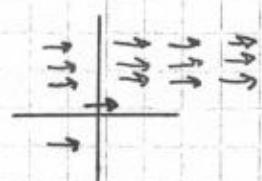
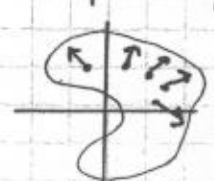
הפונקציה לפונקציה.

הכאן: ברור אם η גבוהה מהמפלגה $u \times v$.

הערה:

$F: U \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ היא פונקציה $\mathbb{R}^n \supset U$ ו- $F(p) = (p, F(p))$

$$p \mapsto (p, F(p)(e_1)_p + \dots + F(p)(e_n)_p)$$



$$F(x_1, \dots, x_n) = (F_1(x_1, \dots, x_n), F_2(x_1, \dots, x_n), \dots, F_m(x_1, \dots, x_n)) = (F^1(x^1, \dots, x^n), F^2(x^1, \dots, x^n), \dots)$$

$$V_p = p \times \mathbb{R}^n$$

אם

יורה תורה - אומר :

$$p \times a^k(\mathbb{R}^n)^2$$

אם $\mathbb{R}^n \supset U$ ו- $0 \leq k \leq n$ אז $a^k(\mathbb{R}^n)$ הוא חלק מהמרחב $a^k(\mathbb{R}^n)$

$$p \mapsto \omega \in a^k(\mathbb{R}^n)$$

אם $k=0$

$p \mapsto f(p)$ - אומר $k=0$ תמיד p פונקציה

אם $k=1$ אז $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ ו- df_p הוא פונקציה $a^1(\mathbb{R}^n)$ ו- $\mathbb{R}^n$ ו- $\mathbb{R}$

אם $k=1$ אז $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ ו- df_p הוא פונקציה $a^1(\mathbb{R}^n)$ ו- $\mathbb{R}^n$ ו- $\mathbb{R}$

אם $k=1$ אז $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ ו- df_p הוא פונקציה $a^1(\mathbb{R}^n)$ ו- $\mathbb{R}^n$ ו- $\mathbb{R}$

אם $k=1$ אז $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ ו- df_p הוא פונקציה $a^1(\mathbb{R}^n)$ ו- $\mathbb{R}^n$ ו- $\mathbb{R}$

אם $k=1$ אז $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ ו- df_p הוא פונקציה $a^1(\mathbb{R}^n)$ ו- $\mathbb{R}^n$ ו- $\mathbb{R}$

אם $k=1$ אז $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ ו- df_p הוא פונקציה $a^1(\mathbb{R}^n)$ ו- $\mathbb{R}^n$ ו- $\mathbb{R}$

אם $k=1$ אז $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ ו- df_p הוא פונקציה $a^1(\mathbb{R}^n)$ ו- $\mathbb{R}^n$ ו- $\mathbb{R}$

$$\omega_p = \sum_{i=1}^n a_i(p) dx^i$$

$$\omega_p = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k}(p) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

אם $f: U \rightarrow \mathbb{R}$

$$D_j f = \frac{\partial f}{\partial x^j} \quad df = D_1 f \cdot dx^1 + \dots + D_n f \cdot dx^n = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n$$

$$(v^1, \dots, v^n) = v_p \in \mathbb{R}^n$$

$$dx^i(p)(v_p) = v^i$$

אם $v = (v^1, \dots, v^n)$ אז $v_p = (v^1, \dots, v^n)$

אם $v = (v^1, \dots, v^n)$ אז $v_p = (v^1, \dots, v^n)$

$$f^* \in \text{Hom}(W^*, V^*) \quad f^* v \in V^*$$

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ M_p & \xrightarrow{f_*} & N_p \\ M_p^* & \xleftarrow{f^*} & N_p^* \end{array}$$

משפט

$$\mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$R_p^* = M_p \ni v_p \quad f_*(v_p) = (Df)_p(v_p) \quad \text{כל } v_p \in T_p M \rightarrow f_* v_p \in T_{f(p)} N \quad \text{כל}$$

$$N_p^* \ni \varphi \quad [f^*(\varphi)](v_p) = \varphi(f_* v_p) = \varphi[(Df)_p(v_p)]$$

$$N_p^* \ni w \quad (f^* w)_p(v_1)_p, (v_2)_p, \dots, (v_k)_p = w_{f(p)}(f_*(v_1)_p, \dots, f_*(v_k)_p)$$

דוגמה

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$1 \leq i \leq m \quad f^*(dx^i) = \sum_{j=1}^n D_j f^i dx^j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^j} dx^j$$

$$a^k(\mathbb{R}_p^m) \ni w_1, w_2 \quad f^*(w_1 + w_2) = f^*(w_1) + f^*(w_2) \quad 2$$

$$g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, a^k(\mathbb{R}^m) \ni w, a^k(\mathbb{R}^n) \ni w \quad f^*(g \cdot w) = (g \circ f)_* f^*(w) \quad 3$$

$$[a \cdot v = a \wedge v \wedge v] \quad a \cdot f(p) \quad v \ni v \quad \text{כל } v \in T_p M \rightarrow f_* v \in T_{f(p)} N \quad \leftarrow \text{כל } v \in T_{f(p)} N$$

$$(g \cdot w)_p = g(p) w_p$$

$$f^*(w \wedge \eta) = f^* w \wedge f^* \eta \quad 4$$

$$g(w) \in \mathbb{R}_{f(p)}^n \quad 3 \quad \text{כל } w \in T_p M$$

$$\begin{aligned} [f^*(g \cdot w)]_p [(v_1)_p, \dots, (v_k)_p] &= [g \cdot w]_{f(p)} [f_*((v_1)_p), \dots, f_*((v_k)_p)] \\ &= g(f(p)) w_{f(p)} (f_*(v_1)_p, \dots, f_*(v_k)_p) = g(f(p)) f^*(w) \end{aligned}$$