

14



2.



۱۰۵

פיליפס - חלרף

26

$$V \rightarrow \mathbb{R} \text{ פונקציה רגולרית} \quad \text{פולינום} \quad \mathcal{J}^1(V) = V^* \quad (1) \\ \text{פולינום} \quad \mathcal{J}^0(V) = \mathbb{R} \quad (2)$$

המשפט

$$(\mathcal{J}^k(V) \ni \omega) \text{ נקרא } V \text{ מתחת } \mathcal{J}^k(V) \text{ לסימטריה} \\ = (\text{sign } \sigma) \omega(v_{\sigma(1)} \dots v_{\sigma(k)}) \\ \sigma = (i, j) \text{ החלפה}$$

משפט: סימטריה מוכתרת כי $\det(v_1, \dots, v_k)$ הינה הפונקציה k -רצית
 כימיה לבניה מתחלפת ומקיימת $1 = \det(e_1, \dots, e_n)$ $V = \mathbb{R}^n$ n

$$\text{Alt}(\omega)(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sign}(\sigma) \omega(v_{\sigma(1)} \dots v_{\sigma(k)}) : \omega \in \mathcal{J}^k(V) \\ \text{ובי } a(V) \text{ אולי } \mathcal{J}^k(V) \text{ הומומורפיזם של } \mathcal{J}^k(V) \text{ אל } \mathcal{J}^k(V) \text{ סימטריה}$$

למה

$$\text{Alt}(\omega) \in \mathcal{J}^k(V) \text{ אם } \mathcal{J}^k(V) \ni \omega \quad (1)$$

$$\text{Alt}(\omega) = \omega \text{ אם } \mathcal{J}^k(V) \ni \omega \quad (2)$$

$$\mathcal{J}^k(V) \ni \omega \text{ אם } \text{Alt}(\text{Alt}(\omega)) = \text{Alt}(\omega) \quad (3)$$

הוכחה

$$\text{Alt}(\omega)(v_{\pi(1)} \dots v_{\pi(k)}) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sign } \sigma) \omega(v_{\sigma\pi(1)} \dots v_{\sigma\pi(k)}) : S_k \ni \pi \quad (1) \\ (\text{sign } \sigma') = (\text{sign } \sigma)(\text{sign } \pi) \text{ אם } \sigma' = \sigma \pi$$

$$\text{Alt}(\omega) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sign } \sigma) \omega(v_{\sigma(1)} \dots v_{\sigma(k)}) = \text{sign } \pi \text{ Alt}(\omega)$$

$$\text{Alt}(\omega)(v_1 \dots v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sign } \sigma) \omega(v_{\sigma(1)} \dots v_{\sigma(k)}) = \quad (2) \\ = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sign } \sigma)^2 \omega(v_1 \dots v_k) = \omega(v_1 \dots v_k)$$

$$\text{נכון } (2) + (1) \quad (3)$$



המשפט

אם ω ו- η אבילים $a^k(V)$ ו- $a^l(V)$ (המתאמה) אז:

exterior product, wedgs product:

$$\omega \wedge \eta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(k+l)!}{k!l!} \text{Alt}(\omega \otimes \eta) \in a^{k+l}(V)$$

הוא הפונקציה $k+l$ -רצית

$$(\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta = \omega_1 \wedge \eta + \omega_2 \wedge \eta \quad (1)$$

$$a \in \mathbb{R} \quad \omega \wedge a\eta = a\omega \wedge \eta = a(\omega \wedge \eta) \quad (2)$$

$$\text{הוא הפונקציה } k+l \text{-רצית} \quad (3)$$

$$(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta)$$

הוכחה

$$\text{Alt}(\omega \otimes \eta) = 0 \quad \text{or} \quad \text{Alt}(\omega) = 0 \quad \text{or} \quad \gamma^k(V) \ni \eta \quad \gamma^k(V) \ni \omega \quad \text{or} \quad ①$$

$$\text{Alt}(\text{Alt}(\omega \otimes \eta) \otimes \theta) = \text{Alt}(\omega \otimes \text{Alt}(\eta \otimes \theta)) = \text{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \theta) \quad ②$$

$$\omega \wedge \eta \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta) = \frac{(k+l+m)!}{k!l!m!} \text{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \theta) \quad \text{or} \quad \gamma^m(V) \ni \theta \quad \text{or} \quad ③$$

הוכחה

$$(k+l)! \text{Alt}(\omega \otimes \eta)(v_1 \dots v_{k+l}) = \sum (\text{sign } \sigma) \omega(v_{\sigma(1)} \dots v_{\sigma(k)}) \eta(v_{\sigma(k+1)} \dots v_{\sigma(k+l)}) \quad ①$$

G is a group, $S_{k+l} \supset G$ is a subgroup of S_{k+l} - the set of permutations that permute the first k elements and the last l elements separately.

(Permutation group) S_{k+l} is a group.

It is a subgroup of S_{k+l} .

$$S = \cup G_s$$

G is a group, S is a subgroup of S_{k+l} .

$$gs = g't$$

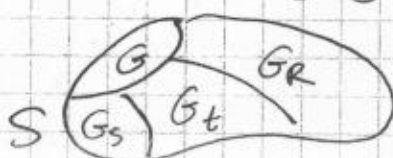
or $G_s \cap G_t \neq \emptyset$ then $G_s = G_t$.

$$s = g^{-1}g't$$

$$G_s = Gg^{-1}g't = Gt$$

$$G_t = G_s \Leftrightarrow t \in sG$$

cosets $\rightarrow$ left cosets of G in S .



$(\sigma_0 \in S)$ G_{σ_0} is a coset of G in S .

$$\sum (\text{sign } \sigma) (\text{sign } \sigma_0) \omega(v_{\sigma \sigma_0(1)} \dots v_{\sigma \sigma_0(k)}) \eta(v_{\sigma \sigma_0(k+1)} \dots v_{\sigma \sigma_0(k+l)})$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_{k+1} &= v_{\sigma \sigma_0(k+1)} \\ &\vdots \\ \omega_{k+l} &= v_{\sigma \sigma_0(k+l)} \end{aligned} \right\} \text{ then } \eta(\omega_{k+1} \dots \omega_{k+l})$$

$$\text{Alt}(\text{Alt}(\eta \otimes \theta) - \eta \otimes \theta) = \text{Alt}(\eta \otimes \theta) - \text{Alt}(\eta \otimes \theta) = 0 \quad ②$$

$$0 = \text{Alt}(\omega \otimes (\text{Alt}(\eta \otimes \theta) - (\eta \otimes \theta))) \quad \text{Alt } \eta \otimes \theta \text{ is } 0 \text{ by } ①$$

$$(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \frac{(k+l+m)!}{(k+l)!m!} \text{Alt}((\omega \wedge \eta) \otimes \theta) = \dots \quad ③$$

$$= \frac{(k+l+m)!}{(k+l)!m!} \left(\frac{(l+k)!}{l!k!} \text{Alt}((\omega \otimes \eta) \otimes \theta) \right) = \frac{(k+l+m)!}{m!l!k!} \text{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \theta)$$

הוכחה

$f_i(v_j) = \delta_{ij}$ (Kronecker delta). Let $(p_1, \dots, p_n)$ be a basis of V and $(v_1, \dots, v_k)$ be a basis of $a^k(V)$.

Let $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k}$ be a basis of $a^k(V)$ where $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$.

$$\dim a^k(V) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

הוכחה:

$a^k(V) = \text{Alt}(\gamma^k(V))$ ו $\gamma^k(V)$ הם סכום $\varphi_{i_1} \otimes \dots \otimes \varphi_{i_k}$ כי

$a^k(V) \rightarrow \gamma^k(V) \rightarrow a^k(V)$ $\text{Alt}: \gamma^k(V) \rightarrow a^k(V)$ כי $\gamma^k(V)$ הוא תת-חלל של $\gamma^k(V)$.

$i_1 < \dots < i_k$ $\omega = \sum w_{i_1 \dots i_k} \varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k} = 0$ כי ω הוא צורן אנטי-סימטרי.

$$\omega(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_k}) = \sum_{j_1, \dots, j_k} w_{j_1 \dots j_k} \underbrace{\varphi_{j_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{j_k}(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_k})}_{\delta_{ij}} = w_{i_1 \dots i_k}$$

$$\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k}(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_k}) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \varphi_{i_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes \varphi_{i_{\sigma(k)}}(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_k}) = 1$$

$$= \frac{1}{k!} \frac{(k+1)!}{k} \sum_{\sigma \in S_k} (\varphi_{i_{\sigma(1)}}(\varphi_{i_1})) \varphi_{i_{\sigma(2)}}(\varphi_{i_2}) \dots \varphi_{i_{\sigma(k)}}(\varphi_{i_k}) = 1$$

הוכחה: ***

אם ω הוא צורן אנטי-סימטרי ו $\varphi_{i_1} = \varphi_{i_2}$ אז

$$\omega(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_j}, \dots, \varphi_{i_k}) = 0$$

$\varphi_{i_1} = \varphi_{i_j}$

כלומר ω הוא צורן אנטי-סימטרי.