7.1.2009
הרצאה מס 20

חדוא 3
אלי שלבר

__משפט משיכה שלגבר__

$f:U\to\mathbb{R}^k$ $\quad U\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה

$a\in U \quad f(a)=0 \qquad \operatorname{rank}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_a=k$

$n-k+1\le j\le n$

$1\le i\le k$

אזי קיימת סביבה של a $A\subset U$ ודיפאומורפיזם $h:A\to\mathbb{R}^n$ כך שמתקיים
$f\circ h(x_1,\dots,x_n)=(x_{n-k+1},\dots,x_n)$

__מסקנה: משפט__

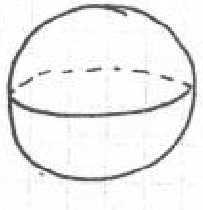
תהי $A\subset\mathbb{R}^n$ ק"פ $g:A\to\mathbb{R}^k$ דיפרנציאבילית כך ש $\deg(Dg)_x=k$
לכל $x\in A$ כך ש $g(x)=0$. אזי $g^{-1}(0)=M$ היא יריעה k ממדית
ב- $\mathbb{R}^n$.

__הוכחה:__ תרגיל.

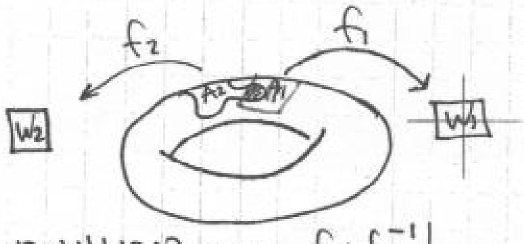
__דוגמאות__

$g(x)=|x|^2-1 \quad x\in\mathbb{R}^n$

$g^{-1}(0)=M$



היריעה היא ספירה.



__מסקנה__

אם (A_1,f_1) ו $W_1\subset\mathbb{R}^k$ $\Big\}$ הן קורדינטות
(A_2,f_2) ל $W_2\subset\mathbb{R}^k$ מקומיות ב- M

אזי $f_2\circ f_1^{-1}|_{f_1(A_1\cap A_2)}:\underbrace{f_1(A_1\cap A_2)}_{\subset W_1}\longrightarrow \underbrace{f_2(A_1\cap A_2)}_{\subset W_2}$ הינו דיפאומורפיזם

***__הערה__: כדאי להסתכל בספר של Spivak

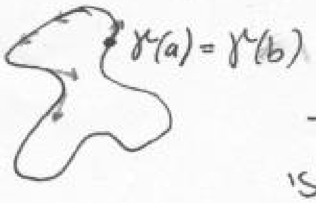
__משפט ז'ורדן__

כל מסילה סגורה ופשוטה במישור $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ מתקיים $\mathbb{R}^2\setminus\gamma[a,b]$ מורכב
משני תחומים פתוחים זרים אשר השפה המשותפת שלהם היא הקבוצה $\gamma[a,b]$.
$\gamma[a,b]$ הינה קומפקטית (אחד התחומים בדווקא הינו בעל סגור קומפקטי)

__משפט גרין__

תהי γ מסילה סגורה פשוטה וחלקה אורך עם פנים D. נניח כי כיוון

המסלה חיובי (נגד כיוון השעון. הגדרה לא מדויקת: שבכל נקודה המשיך נמצא משמאל למסלה).

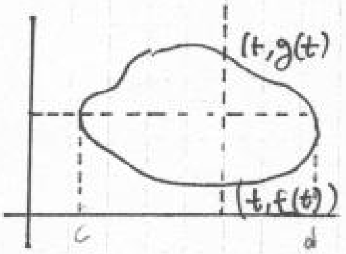


- תהיינה $P(x,y)$ $Q(x,y)$ פונקציות ממשיות רציפות של D כך ש $\frac{\partial P}{\partial x}$ $\frac{\partial Q}{\partial y}$ רציפות וחסומות על D אזי

$$\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_\gamma Q\,dx + P\,dy$$

הוכחת מקרה פרטי רציף:

תהי γ מסלה פשוטה וסגורה במישור כך שכל ישר המקביל לאחד הצירים ומכיל נקודה של D (הפנים) פוגש את γ בשתי נקודות שונות בדיוק אזי מתקיים טענת משפט גרין.



$f(t)<g(t)$

הוכחה:

הטילה של $\gamma[a,b]$ על ציר x הינו קבוצה קומפקטית קשורה לכן זה קטע סגור נאמר $[c,d]$.

$\frac{\partial Q}{\partial y}$ רציפה ולכן אינטגרבילית על D.

פוביני

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial Q}{\partial y}\,dy\,dx = \int_c^d \left[Q(x,g(x)) - Q(x,f(x))\right] dx =$$

$$= \int_c^d Q(x,g(x))\,dx + \int_d^c Q(x,f(x))\,dx = -\int_\gamma Q\,dx$$

בגלל שהולכים עם כיוון השעון
! γ מוגדרת נגד כיוון השעון

באופן דומה מקבלים $\iint_D \frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy = \int_\gamma P\,dy$

דוגמא

$\gamma(t) = e^{it} = (\cos t, \sin t)$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$

נבחר $P(x,y) = x$ $\quad Q(x,y) = -y$ לפי משפט גרין

$$\iint_D (1-(-1))\,dx\,dy = 2A$$

$$\int_\gamma x\,dy = \int_0^{2\pi} \cos t \underbrace{\cos t\,dt}_{dy} = \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2t)\,dt = \pi$$

באותו אופן נחשב את $\int_\gamma y\,dx$ ונקבל:

$$\int_\gamma y\,dx = -\pi$$

$$\Leftarrow \quad \iint_D (1-(-1))\,dx\,dy = 2A = 2\pi$$

אלגברה

מכפלה חיצונית של וקטורים במרחב וקטורי V ממימד n.

הגדרות

אם V מרחב וקטורי (מעל $\mathbb{R}$) ממימד סופי n.

- אוסף הפונקציונלים הלינאריים על V הוא מרחב וקטורי (V^* המרחב הדואלי) ל V

$\dim V^* = n$. אם $\{v_i\}_{i=1}^{n}$ בסיס ל-V אזי הפונקציונלים $\varphi_1 \dots \varphi_n$

המוגדרים ע"י $\varphi_i(v_j)=\delta_{ij}$ מהווים בסיס ל-V^* (הבסיס הדואלי ל $\{v_1 \dots v_n\}$)

V^{**} איזומורפי קנונית ל-V. $V^{**} \ni v^*: \varphi \mapsto \varphi(v)$.

פונקציה $\varphi: \underbrace{V\times \dots \times V}_{k} \to W$ כאשר W מרחב וקטורי נקראת k לינארית

(בפרט עבור $k=2$ בילינארית).

אם φ לינארית בכל אחד מן המשתנים כאשר כל שאר המשתנים קבועים.

נגדיר ב- $V=\mathbb{R}^n$ $\varphi(v_1 \dots v_n) = \det a_{ij}$ כאשר $v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j$.

נסמן על ידי $\mathcal{T}^k(V)$ את אוסף הפונק' ה-k לינאריות על V.

בפרט $V^* = \mathcal{T}^1(V)$.

אם $\varphi \in \mathcal{T}^k(V)$ ו $\psi \in \mathcal{T}^l(V)$ נגדיר: $\varphi \otimes \psi: \underbrace{V\times\dots\times V}_{k} \times \underbrace{V\times\dots\times V}_{l} \to \mathbb{R}$

$\varphi \otimes \psi \in \mathcal{T}^{k+l}(V)$ (טנזור).

$$\varphi\otimes\psi(v_1 \dots v_k, v_{k+1} \dots v_{k+l}) = \varphi(v_1 \dots v_k)\,\psi(v_{k+1} \dots v_{k+l})$$

קל להוכיח:

$$(\varphi_1+\varphi_2)\otimes\psi = \varphi_1\otimes\psi + \varphi_2\otimes\psi$$

$$\varphi\otimes(\psi_1+\psi_2) = \varphi\otimes\psi_1 + \varphi\otimes\psi_2$$

$$a\varphi\otimes\psi = \varphi\otimes a\psi = a(\varphi\otimes\psi)$$

$$\varphi\otimes(\psi\otimes\theta) = (\varphi\otimes\psi)\otimes\theta$$

$$\mathcal{T}(V) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{T}^k \qquad \mathcal{T}^0 = \mathbb{R}$$

טענה

אם $\{v_1 \dots v_n\}$ בסיס ל V ו $\{\varphi_1 \dots \varphi_n\}$ הבסיס הדואלי

אזי הטנזורים $\varphi_{i_1}\otimes\varphi_{i_2}\otimes\dots\otimes\varphi_{i_k}$ $(1 \le i_1, \dots, i_k \le n)$

מהווים בסיס ל $\mathcal{T}^k(V)$. בפרט $\dim \mathcal{T}^k(V) = n^k$

הוכחה:

$$(\varphi_{i_1}\otimes\dots\otimes\varphi_{i_k})(v_{j_1},\dots,v_{j_k}) = \delta_{i_1 j_1}\cdot\delta_{i_2 j_2}\cdots\delta_{i_k j_k} = \begin{cases} 1 & j_1=i_1, j_2=i_2 \dots \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

יהי $\varphi \in \mathcal{T}^k(V)$ ואם $w_1, \dots w_k$ k וקטורים ב-V $\quad w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j$

$$\varphi(w_1, \dots w_k) = \sum_{j_1 \dots j_k=1}^{k} a_{1j_1}\cdots a_{kj_k}\,\varphi(v_{j_1} \dots v_{j_k}) =$$

$$= \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{k} \varphi(v_{j_1},\dots,v_{j_k})(\varphi_{i_1}\otimes\dots\otimes\varphi_{i_k}(w_1\dots w_k))$$

$\Leftarrow \varphi = \sum \varphi(v_{i_1}\dots v_{i_k})\varphi_{i_1}\otimes\dots\otimes\varphi_{i_k} \Leftarrow$ פורש

נותר להראות שלה בת"ל: נניח כי: $0 = \sum a_{i_1\dots i_k}\varphi_{i_1}\otimes\dots\otimes\varphi_{i_k} = \varphi$

נפעיל את φ על $(v_{j_1},\dots,v_{j_k})$:

$$0 = \varphi(v_{j_1},\dots,v_{j_k}) = a_{j_1,\dots,j_k}$$

$V\otimes\dots\otimes V$ קונטרה וריאנטים

$V^*\otimes\dots\otimes V^*$ קו-וריאנטים