31.12.2008
הרצאה מס' 18

תרגול 3
אבי גלנר

משפט נקודת השבת של Brouwer

לכל העתקה רציפה $f:\overline{B_1(0)}\to\overline{B_1(0)}$ יש נקודת שבת. כלומר קיימת נקודה $x\in\overline{B_1(0)}$ כך ש- $f(x)=x$.

$\overline{B_1(0)}=\{x\in\mathbb{R}^n: |x|\le 1\}$.

למה

בהינתן $G=GL(n,\mathbb{R})$.

1. עבור $A\in G$ נסמן $\alpha=|A^{-1}|^{-1}$ אזי $\forall x$ $|Ax|\ge\alpha|x|$.
2. אם $A\in G$ ו- $B\in Hom(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ מקיימת $\beta=|B-A|<\alpha$ אז $B\in G$ ומקיים $|B^{-1}|<\frac{1}{\alpha-\beta}$.
3. ההעתקה $A\mapsto A^{-1}$ מ- G לעצמה רציפה. גם העתקת הכפל $(A,B)\mapsto AB$ $G\times G\to G$ רציפה.
4. (חדש) אם $k\in Hom(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ מקיימת $|k|<1$ אזי $I+k\in G$ ומתקיים $\det(I+k)$

הוכחה של 4:

נגדיר $B=I+k$ $A=I$ אזי $\alpha=1$

$|B-A|=|k|<1=\alpha$ לכן $B=I+k$ הפיכה

נגדיר $\varphi(t)=\det(I+tk)$ $[0,1]\to G$, $t\mapsto I+tk$

לכן $\varphi(t)$ מוגדרת והיא פולינום ב-t.

$\varphi(0)=1$, $\varphi(t)\neq 0$ לכל $t\in[0,1]$ (בגלל הפיכות).

לכן $\varphi(t)>0$ לכל t ובפרט עבור $t=1$ כלומר $\det(I+k)>0$

הגדרה

יהי X מרחב מטרי. $Y\subset X$. פונקציה $r:X\to Y$ רציפה נקראת רטרקט (של X על Y) אם $r(y)=y$ לכל $y\in Y$.

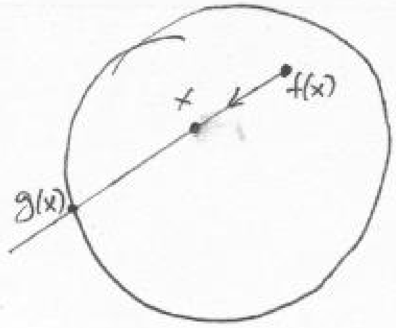
טענה

לא קיימת פונקציה f שהיא C^1 על סביבה של $\overline{B_1(0)}$ כך ש: $\overline{B_1(0)}\to S$
כאשר $S^{n-1}=\{x:|x|=1\}$ הוא רטרקט של $\overline{B_1(0)}$ על S^{n-1}

הערה

נניח כי $f:\overline{B_1(0)}\to\overline{B_1(0)}$ העתקה רציפה ללא נקודת שבת.

4)



. $x \neq f(x)$

נגדיר את $g(x)$ בנקודה על S^{n-1} בה
פוגשת הקרן שהיא המשך הקטע $[f(x),x]$ בכיוון
הזה) את S^{n-1}.

קל לראות כי $g(x)$ היא רטרקט.

<u>הוכחת הטענה</u>

נניח בשלילה קיים f כזאת.

נגדיר פונקציה עזר $h(x)=f(x)-x$

$$f^t(x) = x + th(x) = (1-t)x + tf(x) \qquad (0\le t\le 1)$$

h מתאפסת על S^{n-1} ולכן לכל $x\in S^{n-1}$ ולכל $0\le t\le 1$ $f^t(x)=x$

כיוון ש-h גזירה ברציפות על הקבוצה $\overline{B_1(0)}$ נובע כי h מקיימת תנאי ליפשיץ
$|h(x)-h(y)|\le M|x-y|$ עבור $x,y\in \overline{B_1(0)}$ כאשר
$M'=\max\{(Dh)_x : x\in\overline{B_1(0)}\}$ $\quad M=\max(M',1)$ (תרגיל).

נראה כי עבור $t\in[0,\frac{1}{M})$ מתקיים $f^t|_{\overline{B_1(0)}}$ הינה העתקה חח"ע:

אם $f^t(y)=f^t(x)$: $\quad |x-y| = t|h(x)-h(y)|\le tM|x-y|$

אם $\underbrace{1>tM}_{\text{לפי ההנחה ש } t\in[0,\frac{1}{M})}$ זו סתירה אלא אם כן $x=y$.

$$(Df^t)_x = I + t(Dh)_x$$

אם $t\in[0,\frac{1}{M})$ אז: $|t(Dh)_x|<1$ ולכן $(Df^t)_x$ הפיכה.

$Jf^t(x)\neq 0$ לכל $x\in\overline{B_1(0)}$.

לפי משפט ההעתקה הפתוחה $f^t(B_1(0))\subset\overline{B_1(0)}$ הינו קבוצה פתוחה.

לכן $f^t(B_1(0))\subset B_1(0)$.

$$(S^{n-1}=\partial B_1(0)=\partial\overline{B_1(0)})$$

נראה כי: $f^t(B_1(0)) = B_1(0)$. אחרת קיימת נקודה $e\in B_1(0)\setminus f^t(B_1(0))$

נבחר נקודה כלשהי $g\in f^t(B_1(0))$.

נחבר את g ו-e ע"י קטע $\psi(t) = te+(1-t)g$ $\quad 0\le t\le 1$

מן הקמירות טווח ψ מוכל-כולו ב $B_1(0)$.

נגדיר $0< t_0=\sup\{t:\psi(t)\in f^t(B_1(0))\}$ $\qquad u=\psi(t_0)$

טענה $u\in\partial f^t(B_1(0)) = f^t(B_1(0))\setminus f^t(B_1(0))$

מרציפות f^t $\quad \overline{f^t(B_1(0))} \subset f^t(\overline{B_1(0)})$

$f^t(B_1(0)) \ni f^t(a_n) \to b$ כאשר $B_1(0) \ni a_n$ אז קיימת סדרה $a_{n_i} \to a$

$a \in \overline{B_1(0)}$ ומרציפות $f^t(a) = \lim f^t(a_{n_i}) = b$ $\Leftarrow$ הטענה נכונה.

[הערה: השתמשנו בטענה: $f^t|_{\overline{B_1(0)}}$ חח"ע ממשפט ההעתקה הפתוחה]

מכאן נובע כי $u \in S^{n-1} = \partial B_1(0)$.

כיוון ש $f^t(x) = x$ לכל $x \in S^{n-1}$ אילו הייתה $u \in B_1(0)$ אז היא הייתה

מהצורה $u = f^t(\omega)$ כאשר $\omega \in B_1(0)$ וזה לא נכון כי הנחנו

את הטענה והראינו $u \in \overline{f^t(B_1(0))} \setminus f^t(B_1(0))$ כלומר $u \notin f^t(B_1(0))$

קיבלנו סתירה לכך שהקבוצה המחברת של g-! חל מכדור הפתוח.

קיבלנו כי עבור $t \in [0, \frac{1}{M})$ קיים $f^t : B_1(0) \twoheadrightarrow B_1(0)$ $\quad f^t(B_1(0)) = B_1(0)$

וכן $f^t(\partial B_1(0)) = \partial B_1(0)$.

f^t הינו דיפאומורפיזם (ממחלקה C^1) של $\overline{B_1(0)}$ על עצמו.

נשתמש בנוסחת שינוי המשתנים כדי לחשב את נפח כדור היחידה:

$$\vartheta(\overline{B_1(0)}) = \vartheta(f^t(\overline{B_1(0)})) = \int_{(f^t)^{-1}(\overline{B_1(0)})} 1_B \circ f^t(y)\, |Jf^t|\, dy \underset{Jf \geq 0}{=}$$

$$\overset{\shortparallel}{\int_{B_1(0)} 1_{\overline{B_1(0)}}(x)\,dx}$$

$$= \int_{(f^t)^{-1}(\overline{B_1(0)})} 1_B \circ f^t(y)\, Jf^t\, dy = \int_{\overline{B_1(0)}} Jf^t\, dy$$

לכן $\int_{\overline{B_1(0)}} Jf^t\, dy$ בת"ל ב-t עבור $[0, \frac{1}{M}) \ni t$

אבל $(Df^t)_x = I + t(Dh)_x$ ולכן $(Jf^t)_y = \det(I + t(Dh)_y)$ הוא פולינום ב-t

לכן הפונקציה $\int Jf^t(y)\,dy$ כפולינום ב-t הוא קבוע. בפרט עבור $t=1$

$$\vartheta(\overline{B_1(0)}) = \int_{B_1(0)} Jf^1(x)\,dx = \int_{B_1(0)} Jf(x)\,dx$$

כי $f^1 = f$.

הנחנו כי $f(\partial B_1(0)) = \partial(\overline{B_1(0)}) = S^{n-1}$

כלומר לכל $\overline{B_1(0)} \ni x$ $\quad 1 = |f(x)|^2 = \langle f(x), f(x) \rangle$

$f = (f_1, f_2 \dots f_n)$

$$\left\langle \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}, f(x) \right\rangle = 0$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_i} 1 = 2 \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}(x), f(x) \right\rangle$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

לכן $f(x) \perp \frac{\partial f}{\partial x_i}$ לכל $1 \le i \le n$ לכן $f(x)$ אורתוגונלי לכל עמודות $(Df)_x$

לכן כיוון ש $1 = f(x)$ אנו רואים כי $(Df)_x$ סינגולרית (כלומר דטרמין

אפס לכל x). $\Rightarrow 0 = \int_{\overline{B_1(0)}} 0 \, dx = \vartheta(\overline{B_1(0)}) > 0$ וזו סתירה.

$\blacksquare$