

הקדמה

תהי $U \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה.

ג' תהי $T: U \rightarrow TU \subset \mathbb{R}^n$ זיפאטוריסם

ג' תהי $f: TU \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה ורצויה

ש' $\int_U f = \int_U (f \circ T) |dT|$! $\bar{U} \subset U$: $\bar{U}$ קבוצה סגורה

$$\int_U f = \int_U (f \circ T) |dT|$$

הגדרה

א' תהי $\mu: \mathcal{U}(U) \rightarrow \mathbb{R}$ (אשר $\mathcal{U}(U)$ אישף הקבוצות U ש' U פונקציה מדידתית) ונבחר סדר קואורדינטות T ב- U בהתאם אל מרחב $\mathbb{R}^n$ (הנשים הפאיים):

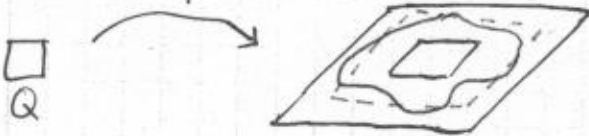
1. אדיטיביות: $\mu(\Omega_1 \cup \Omega_2) = \mu(\Omega_1) + \mu(\Omega_2)$ לכל $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{U}(U)$ כ' $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$

2. רציפות: אם $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j$ (כ' Ω_j אישף U) אז $\mu(\Omega) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(\Omega_j)$

3. ציור: אם $x \in U$ קיים היעדר $\lim_{Q \ni x} \frac{\mu(Q)}{v(Q)} = \frac{d\mu}{dv}(x)$ (אשר $x \in Q$ הוא קבוצה והיעדר Q כ' $0 < \text{diam } Q$)

הוכחה

א' תהי T העניימ אל ג' T העניימ קיים היעדר $\lim_{Q \ni x} \frac{v(TQ)}{v(Q)} = |dT|(x)$



ש' f

הפונקציה $\mu_f(\Omega) = \int_{\Omega} f$ היא רציפה בהתאם. י' f כ' $\frac{d\mu_f}{dv} = f$ (אשר $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה (חסומה)).

א' תהי f פונקציה רציפה ב- U :

1. האדיטיביות: $\mu_f(\Omega_1 \cup \Omega_2) = \mu_f(\Omega_1) + \mu_f(\Omega_2)$

2. רציפות: $\lim_{Q \ni x} \frac{\mu_f(TQ)}{\mu_f(Q)} = f(x)$ (אשר f רציפה ב- x)

3. ציור: $\int f = \int_0^{\infty} \mu_f(\Omega_t) dt$ (אשר $\Omega_t = \{x \in U : f(x) > t\}$)

$\omega \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה איחוד סופי קונפיקט
 $\omega \subset \mathbb{R}^n \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ כזה שכל $\omega' \subset \omega$ עם $\text{diam } \omega' < \delta$ מקיים $\mu(\omega') < \epsilon$

אם $\omega \subset \mathbb{R}^n$ אז $\mu(\omega) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(\omega_j)$ כאשר $\omega_j \subset \omega$ ו- $\omega_j \subset \omega_{j+1}$ ו- $\bigcup \omega_j = \omega$

טענה

יהי μ נדבירה בהחלט ונגיד כי $\frac{d\mu}{d\nu}(x) = f(x)$ נדבירה (חסומה, כזו) $\mu(\omega) = \int_{\omega} f d\nu$
 אז $\mu(\omega) = \int_{\omega} \frac{d\mu}{d\nu}(x) d\nu(x)$

הוכחה

מספיק להוכיח כי עבור $f(x) = 0$ ו- $\mu = 0$ שכן עבור μ כלשהו נוכל לקבל לפעם
 $\mu - \mu_f$ $((\mu - \mu_f)' = f - f = 0)$
 נניח אישור כי $f(x) \equiv 0$ מספיק להוכיח כי $\mu(\omega) = 0$ לכל קבוצה ω שבה $f = 0$
 ע"י קריסה מקסימלית של קבוצה פתוחה ω ע"י איחוד מספר סופי של קבוצות (הגיוני)

נניח בשלילה כי $\mu(\omega) \neq 0$ ו- $\mu(\omega) = a > 0$
 $\Leftrightarrow \frac{\mu(\omega)}{\nu(\omega)} = a > 0$



ע"י חלוקה ביחידות (חלוקה של Q לשניים) נסיק כי
 אחת מהקבוצות הקטנות מקימה את השוויון $0 < a \leq \frac{\mu(Q_1)}{\nu(Q_1)}$
 בהינתן צורה נקרא סדרה Q_j של קבוצות $x \in Q_j$
 $f(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\mu(Q_j)}{\nu(Q_j)} \geq a > 0$ סתירה!

הוכחה המשוערת

נשקוף $\mu(\omega) = \int_{\omega} f$ זו פונקציה נדבירה בהחלט (הוכחה כמו
 מקורם אחר במקור $\mu_j \rightarrow \mu$ יהיה $\mu_j \rightarrow \mu$
 ואז $\mu(\omega) = \int_{\omega} f = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu_j(\omega) = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\omega} f_j$
 כאשר $f_j \in Q$

נחלק $\frac{\mu(Q)}{\nu(Q)} = f(T_3) \frac{\nu(T_3)}{\nu(Q)} \leq \nu(Q)$ כאשר $0 < \text{diam } Q$
 $\lim_{Q \ni x} \frac{\mu(Q)}{\nu(Q)} = f(T_x) |J T(x)|$ לפי הגדרה
 $\int f dx = \mu(\omega) = \int_{\omega} f(Tx) |J T(x)| dx$ בהכרחנו
 $T_0 T^{-1} = \text{id}$ $T_x = y$ כאשר $(J T(x))^{-1} = J T^{-1}(y)$ נשים לב
 $(I_d) = (D I)_x = D(T^{-1} \cdot T)_x = (D T)^{-1}_{T_x} \cdot D T_x \Rightarrow (D T^{-1})_y = (D T_x)^{-1}$

המשפט של ג'ורדן

$$\int_A f(x) dx = \int_{g^{-1}(A)} f(g(t)) |Jg| dt$$

$$g: [0, \infty) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

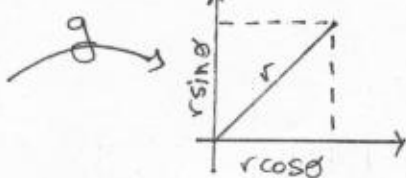
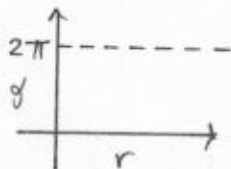
המשפט של ג'ורדן

המשפט של ג'ורדן

שטח

$$g(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

(ר, ת) → (x, y)



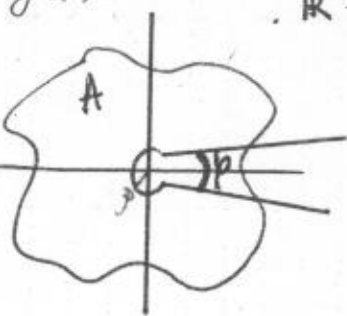
המשפט של ג'ורדן: $(0, \infty) \times (0, 2\pi) = \Omega$ הוא תחום פתוח

$$(Dg)_{(r, \theta)} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$(Jg)_{(r, \theta)} = \det (Dg)_{(r, \theta)} = r \neq 0$$

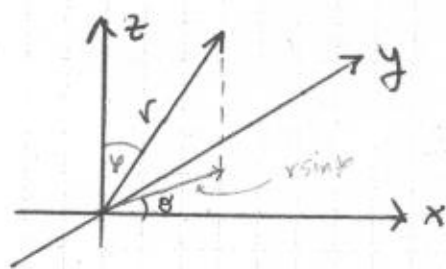
ו. ו. ו.

המשפט של ג'ורדן: $\int_A f(x) dx = \int_{g^{-1}(A)} f(g(r, \theta)) r dr d\theta$ כאשר $g: \Omega \rightarrow A$ היא תחלופה חד-חד-ערכית.



המשפט של ג'ורדן: $\int_A f(x) dx = \int_{g^{-1}(A)} f(g(r, \theta)) r dr d\theta$ כאשר $g: \Omega \rightarrow A$ היא תחלופה חד-חד-ערכית.

המשפט של ג'ורדן: $\int_A f(x) dx = \int_{g^{-1}(A)} f(g(r, \theta)) r dr d\theta$ כאשר $g: \Omega \rightarrow A$ היא תחלופה חד-חד-ערכית.



$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$z = r \cos \phi$$

$$x = r \sin \phi \cos \theta$$

$$y = r \sin \phi \sin \theta$$

$$Dg = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \phi & -r \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \phi & 0 & -r \sin \phi \end{pmatrix}$$

$$(Jg) = r^2 \sin \phi$$

$$\int_A f(x) dx = \int_{g^{-1}(A)} f(g(r, \theta, \phi)) r^2 \sin \phi dr d\theta d\phi$$

$B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ נניח $f: \overline{B_1(0)} \rightarrow \overline{B_1(0)}$ מתונה.

$$\overline{B_1(0)} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$$

$f(x) = x$ לכל $x \in B_1(0)$ ו- $f(1) = 1$.