17.12.2008
הרצאה מס' 14

שבוע 3
א' גלזנר

מדידה לפי ז'ורדן

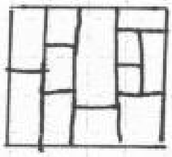
הגדרה:

קבוצה $A\subset\mathbb{R}^n$ הינה מדידה לפי ז'ורדן אם 1_A אינטגרבילית לפי רימן

- לפי משפט לבג 1_A אינטגרבילית $\Leftrightarrow$ קבוצת נקודות אי הרציפות שלה בעלת מידה אפס.
- עבור 1_A קבוצת נקודות אי הרציפות מתלכדת עם הקבוצה ∂A.

נסיק איפוא כי A מדידה ז'ורדן $\Leftrightarrow$ מידת השפה שלה אפס.

אם A מדידה לפי ז'ורדן נגדיר $v(A)=\int_Q 1_A$ כאשר Q תיבה המכילה את A (אם A חסומה).



נראה כי ההגדרה אינה תלויה בבחירת התיבה.

למה

אם f אינטגרבילית רימן ומקיימת על התיבה Q $f(x)=0$ לכל $x\in\mathring{Q}$ אז $=0$:

הוכחה:

יהי Π חלוקה של Q לתיבות $\Pi=\{P_1,\dots,P_\ell\}$

$L(f,P_i)\le 0$ לכן $\underline{\int} f\le 0$ ובאותו אופן $U(f,P_i)\ge 0$ ולכן $\overline{\int} f=0$

לכן $\underline{\int} f=\overline{\int} f=0$

טענה

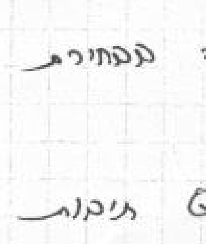
ההגדרה אינה תלויה בבחירת התיבה.

הוכחה:

נניח כי $Q_1,Q_2\supset A$ תיבות

נניח תחילה כי $A\subset Q_1\subset Q_2$ נעדן את Q_1 לחלוקה $\Pi=\{P_1,\dots,P_\ell,Q_1\}$ של Q_2 לתיבות. כאשר $P_0=Q_1$ $\int_{Q_2}1_A=\sum_{i=0}^{\ell}\int_{P_i}1_A=\int_{Q_1}1_A$

במקרה הכללי:



הגדרה:

תהי $f:Q\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית על קובייה Q ותהי $A\subset Q$ קב' מדידה

ז'ורדן נגדיר $\int_A f = \int_Q f \cdot 1_A$

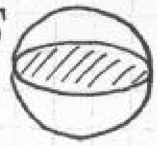
תרגיל: האינטגרל מוגדר היטב כלומר אינו תלוי בבחירת התיבה Q המכילה את A.

נזכיר: איחוד בן מניה של קבוצות בעלות מידה אפס, גם הוא קבוצה אפסית.
לכן קבוצה A מדידה לפי ז'ורדן $\Leftrightarrow$ $A \cap [-k,k]^n$ מדידה ז'ורדן לכל $k \geq 1$.

תרגיל: אם $f: K \to \mathbb{R}$ רציפה כאשר K קומפקטית $K \subset \mathbb{R}^n$ אז הגרף של f
$\text{graph} f = \{(x, f(x)) : x \in K\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ הינו בעל מידה אפס.

מסקנה: כדור הוא קבוצת ז'ורדן

$f(x) = \sqrt{1-(x_1^2+\dots+x_{n-1}^2)}$



תרגיל: אם $A \subset \mathbb{R}^n$ בעלת מידה אפס אז לכל העתקה אורתוגונלית $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
ולכל וקטור $v \in \mathbb{R}^n$ הקבוצה $TA + v$ גם הוא בעלת מידה אפס ולכן אם A
מדידה לפי ז'ורדן גם $TA + v$ מדידה לפי ז'ורדן.

הערה:
אם A קבוצת ז'ורדן בעלת נפח אפס אז גם המידה של A היא אפס (A אפסית). ההפך אינו נכון. לדוגמא: כל קבוצה בת מניה הינה בעלת מידה אפס אך קבוצה בת מנייה צפופה בקטע $[a,b]$ אינה מדידה ז'ורדן. כי השפה של הקבוצה היא כל הקטע $\partial A = [a,b]$.

תרגיל: קבוצה קומפקטית A בעלת מידה אפס הינה מדידה ז'ורדן ובעלת נפח אפס (בגלל הקומפקטיות ניתן לכסות אותה במספר בן מנייה).

מסקנה: אם A מדידה ז'ורדן ; $f: Q \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית התיבה $A \subset Q$ אזי

$$\int_A f = \int_{\bar{A}} f = \int_{\text{int} A} f$$

תזכורת: אם A, B מדידות ז'ורדן

$\bar{A} = \mathring{A} \cup \partial A \qquad \bar{B} = \mathring{B} \cup \partial B$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B} = (\mathring{A} \cup \partial A) \cap (\mathring{B} \cup \partial B) = \underbrace{(\mathring{A} \cap \mathring{B})}_{\text{int}(A \cap B)} \cup (\partial A \cap \mathring{B}) \cup (\mathring{A} \cap \partial B) \cup (\partial A \cap \partial B) = (\mathring{A \cap B}) \cup \partial(A \cap B)$$

ובאותו אופן מראים כי $A \cup B$ מדידה
ז'ורדן ולכן מהנוסחא $1_{A \cup B} + 1_{A \cap B} = 1_A + 1_B$ נקבל $v(A \cup B) + v(A \cap B) = v(A) + v(B)$

בפרט: אם $\emptyset = A \cap B$ נקבל אדיטיביות סופית $v(A \cup B) = v(A) + v(B)$

מטרה

אם $\omega : \mathcal{J}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ מקיימת:

1) אדיטיביות סופית $\omega(A \cup B) = \omega(A) + \omega(B)$ עבור $\emptyset = A \cap B$

2) אינווריאנטיות תחת הזזה: $\forall v\in\mathbb{R}^n$ $\quad \omega(A+v)=\omega(A)$

3) $\omega([0,1]^n)=1$

אז $\omega=v$ (או התוכן) הנפח של ז'ורדן.

<u>הוכחה:</u>

ניתן לקרב $v(A)$ ע"י סכומי דרבו של 1_A על קוביות דיאדיות.

<u>משפט ערך ממוצע</u>

יהי $U\subset\mathbb{R}^n$ תחום כך ש ∂U אפסי ותהי $f:U\to\mathbb{R}$ רציפה וחסומה אז

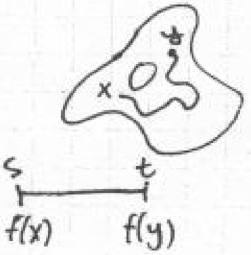
קיימת נקודה $x_0\in U$ כך ש $\int_U f= v(U)f(x_0)$

<u>הוכחה:</u>

$$\left[\int_A f\le\int_A g \qquad f\le g \qquad \int_A f=\int_Q 1_A\cdot f\right]$$

$$m=\inf_U f\le f\le\sup_U f=M$$

$$m\,v(U)\le\int_U f\le M\,v(U)$$



כיוון ש U הוא תחום $f(U)$ הוא קטע.

$$m\le\frac{\int_U f}{v(U)}\le M$$

<u>משפט (פוביני)</u>

בהינתן $A_1\subset\mathbb{R}^{n_1}$, $A_2\subset\mathbb{R}^{n_2}$. A_1 ו A_2 תיבות. $A=A_1\times A_2\subset\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}\cong\mathbb{R}^{n_1+n_2}$

תהי $f:A\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אז: $\int_A f(z)dz$

$$\int_A f(x,y)dx\,dy=\int_{A_2}\left(\underline{\int_{A_1}} f(x,y)dx\right)dy=$$

$$=\int\left(\overline{\int_{A_1}} f(x,y)\,dX\right)dy$$

<u>הערה:</u>
המרצה החליף בהלכה את הסימון A_1 ל 1 ואת הסימון A_2 ל 2

<u>הוכחה:</u>

על פי ההנחה f אינטגרבילית לכן בהינתן $\varepsilon>0$ יש חלוקה π של A כך ש:

$$U(f,\pi)-L(f,\pi)<\varepsilon$$

π היא חלוקה מהצורה $\pi^1\times\pi^2$ כך ש $\{A_1^i,A_2^i,\dots,A_{l_i}^i\}$ $\quad i=1,2$

$$H(y)=\underline{\int_{A^1}}f(x,y)dx,\quad G(y)=\overline{\int_{A^1}} f(x,y)\,dx$$

$$L(f,\pi)=\sum_{j=1}^{l_1}\sum_{k=1}^{l_2}\inf_{(x,y)\in A_j^1\times A_k^2} f(x,y)\,v(A_j^1)\,v(A_k^2)=$$

$$=\sum_{k=1}^{l_2}v(A_k^2)\left(\sum_{j=1}^{l_1}\inf f(x,y)\right)v(A_j^1)\le\sum_{k=1}^{l_2}v(A_k^2)\inf_{y\in A_k^2}H(y)=L(H,\pi^2)$$

$$U(f,\pi)\ge\sum^{l_2}v(A_k^2)\sup G(y)=U(G,\pi^2)$$

[illegible]

$$\int_A f(x,y)dxdy-\varepsilon \le L(f,\Pi)\le L(H,\Pi^2)\le U(H,\Pi^2\le U(G,\Pi^2)\le$$
$$\le U(f,\Pi)\le \int f(x,y)dxdy+\varepsilon$$

לכן G ו-H אינטגרביליות לפי רימן ויתר על כן

$$\int_A f(x,y)dxdy=\int_{A^2} H\,dy=\int_{A^2} G\,dy$$ ∎

<u>הערה:</u> מסימטריה נקבל כי גם $\int f(x,y)dxdy$ בסדר ההפוך מקיים את המשפט.

<u>הערה נוספת:</u> ניתן להכליל את המשפט ל $A_1\dots A_n$ באינדוקציה.

$$\int f(x_1\dots x_n)=\int\int\dots\int f(x_1\dots x_n)\,dx_1dx_2\dots dx_n$$

<u>מסקנה 1:</u>

תהי $S\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה ז'ורדן $f:S\to\mathbb{R}$ רציפה ואי שלילית

נסמן ע"י $V_{f,S}=\{(x_1,\dots x_n,x_{n+1}):(x_1,\dots x_n)\in S,\ 0\le x_{n+1}\le f(x_1\dots x_n)\}$

אזי הנפח של הקבוצה הנ"ל: $v(V_{f,S})=\int_S f(x)dx$

<u>הוכחה:</u>

לפי פוביני: $\int 1_{V_{f,S}}dX\,dX_{n+1}=\int_S\left(\int_0^{f(x)}1\,dX_{n+1}\right)dX=\int_S f(x)dx$

<u>הערה:</u> $V_{f,S}$ היא קבוצה ז'ורדן. שכן $\partial V_{f,S}\subseteq \underbrace{(\partial S\times[0,\infty))}_{\text{קירות}}\cup \underbrace{S\times\{0\}}_{\text{בסיס}}\cup graph(f,S)$

גם בלי זה התיקון הדרוש לה הוכחה שכן הפעלנו את משפט פוביני למרות שאין לנו תנאות.