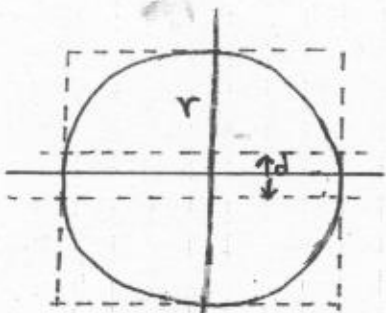


15.12.2003
 ד"ר אביב גולן

תרגיל 3
 גיאומטריה

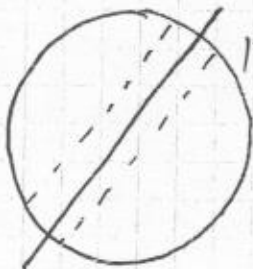


$$Q = [-d, d] \times [-r, r] \times \dots \times [-r, r]$$

$$\nu(Q) = 2d \cdot (2r)^n$$

נבחרתה יש חור שבן לא תראינו

לפחות של חציבה אפס נשמע



בסימבוליס. ניהן אחרתם לקחיה במצב כללי קטין
 תהיה מוסר בקחיה (המקרה) לציונים קטן
 מקצוץ צורה אקטור

אילו קטין
 העברת

$$L(K_n) = \prod_{i=1}^n (1 - \varepsilon_i) \xrightarrow{?}$$

מבוסס

$$\prod_{i=1}^n (1 - \varepsilon_i)$$

המכנה דחיקין

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i = \infty$$

$$1 + x \leq e^x$$

הכמה:

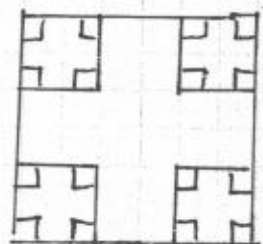
$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq (1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \leq \exp(a_1 + \dots + a_n)$$

אילו כי $a_i > 0$

$$1 - \varepsilon_i = \frac{1}{1 + a_i}$$

$$\frac{1}{1 - \varepsilon_i} - 1 = \frac{\varepsilon_i}{1 - \varepsilon_i} = a_i$$

אילו אילו $\sum \varepsilon_i < \infty$ אקטור הקטור הנחמאמה אילו מדיה אפס



$$\prod_{i=1}^n \left(\frac{1 - \varepsilon_i}{2} \right)^2 = \prod_{i=1}^n (1 - \varepsilon_i)^2$$

$$K = \bigcap K_n \quad \nu(K) = \ln \nu(K_n) > 0$$

$$U = \mathbb{R}^2 \setminus K$$

$$\partial U = \bar{U} \setminus \text{Int } U = \mathbb{R}^2 \setminus U = K$$

הכמה. הכמו כי K אילו קטור מבוצל (לוחי) קטור $K \ni K$ (אילו קטור דור)

$$\text{int}(K) = \emptyset! \quad (K \text{ - סבב } \mathbb{R}^2)$$

U היא איפוא תחום $\mathbb{R}^2$ כן $U \subset \mathbb{R}^2$ אילו אפס

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f \quad \text{אם } f \text{ אינטגרלית על } A \text{ ו-} B$$

הוכחה

היה π_A ו- π_B חלוקה של A ו- B בהתאמה. אז π חלוקה של $A \cup B$ וקיים

$$\begin{aligned} L(f, \pi_A) + L(f, \pi_B) &\leq L(f, \pi \wedge A) + L(f, \pi \wedge B) = \\ &= L(f, \pi) \leq U(f, \pi) \leq U(f, \pi \wedge A) + U(f, \pi \wedge B) \leq \\ &\leq U(f, \pi_A) + U(f, \pi_B) \end{aligned}$$

$$\int_A f + \int_B f \leq \int_{A \cup B} f \leq \int_A f + \int_B f \iff$$

טענה

אם $Q \subset \mathbb{R}^n$ ג'טה סגורה $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה חסומה אז f אינטגרלית על Q

הוכחה:

f רציפה במידה שווה על הקטע הקומפקטי Q ולכן לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך ש-
 $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{v(Q)} \iff |x - y| < \delta$

גם π חלוקה של Q כך שכל ג'טה π הינה π קטנה δ . אז $\{A_i\} = \{A_1, \dots, A_l\}$
 $U(f, \pi) - L(f, \pi) = \sum_{i=1}^l (M_i - m_i) v(A_i) \leq \frac{\varepsilon}{v(Q)} \sum_{i=1}^l v(A_i) = \frac{\varepsilon}{v(Q)} \cdot v(Q) = \varepsilon$

משפט וילסון

גם $Q \subset \mathbb{R}^n$ ג'טה $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה חסומה אז f אינטגרלית על Q אם ורק אם קבוצת נקודות קרובות f היא רציפה על f הינה אבסולוטית.

$$\text{osc}_f(x) = \omega_f(x) = \lim_{y \rightarrow x} \sup f(y) - \lim_{y \rightarrow x} \inf f(y) =$$

$$= \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{|y-x| < \delta} f(y) - \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf_{|y-x| < \delta} f(y)$$

$$0 = \omega_f(x) \iff x \text{ היא נקודה רציפה של } f$$

הוכחה: בהיכנס נכנסת אל משפט וילסון.

משפט

אם $f_1, \dots, f_m: Q \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציות אינטגרליות על Q ו- $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה אז $\varphi(f_1, \dots, f_m): Q \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרלית.

טענה

אם $S \subset \mathbb{R}^n$ הפונקציה 1_S אינטגרלית? (התשובה: לא, כי הפונקציה היא 1 על S ו-0 על S^c ו- $1_S(x) = \begin{cases} 1 & x \in S \\ 0 & x \notin S \end{cases}$)

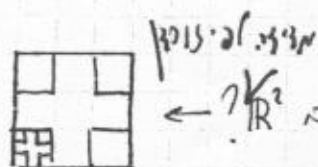
גשומה: רכיבי מלבד רבץ S אינטגרלית — $\int_S f$ — נקרא — $\int_S f$ — הרכיבים
שבה היא אפשרית.

אולם נקרא — $\int_S f$ — הרכיבים של S הן בדיקת נקודות — $\int_S f$ — וזאת כי
 $R^n = \text{int}(S) \cup \partial S$ (יחידה — ∂S).

אין תנאי מספיק לאינטגרליות — $\int_S f$ — אפשר —
אם S אפשר — $\int_S f$ — קיים ונקרא גבול — ∂S —
של S . S נקרא — ∂S — מבינה לפי שורש.
[נסמן $\partial S = \int_S f$]

מבוא

① האם $\mathbb{Q}$ הריצותיים $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$ מניחה לפי שורש?



— לא כיוון שהשפה של $\mathbb{Q}$ זה $\mathbb{R}$.

② האם קבוצת הקטורים $\mathbb{R}^n$ או קבוצת הקטורים $\mathbb{R}^n$ — $\mathbb{R}^n$ —

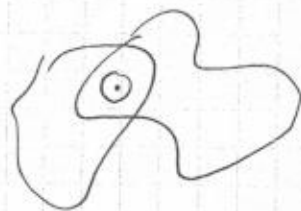
— כן כי $K = K$ והיא קבוצת מידה אפס. אולם לא — K —

$K = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n$ אם $K = K$ אז הפעם מידה אפס

אפשר — K — או K — K — אינטגרלית לפי שורש וזאת

בתחום $K \subset \mathbb{R}^2$ אינן קבוצות מבינה שורש.

③ נניח כי A ו- B מבינה שורש האם $A \cap B$ מבינה שורש?



$$\text{int}(A \cap B) = \text{int} A \cap \text{int} B$$

$$A \subset \text{int} A \cup \partial A$$

$$B \subset \text{int} B \cup \partial B$$

$$\text{int} A = \overset{\circ}{A} \quad \text{סימון:}$$

$$A \cap B \subset \text{int}(A \cap B) \cup (\overset{\circ}{A} \cap \partial B) \cup (\partial A \cap \overset{\circ}{B}) \cup (\partial A \cap \partial B)$$

$$\leftarrow \partial(A \cap B) \text{ מול — קבוצת אפס}$$

באלו שורש מובנים כי $A \cup B$ היא מבינה לפי שורש

$$\lambda_{A \cup B} + \lambda_{A \cap B} = \lambda_A + \lambda_B$$

(קפד)

$$\nu(A \cup B) + \nu(A \cap B) = \nu(A) + \nu(B)$$

ע"י אינטגרלים נקרא:

בפרט אם $E_1, \dots, E_k$ אינן מבינה שורש וכן להלן הרכיבים — S :

$$\nu(\bigcup_{j=1}^k E_j) = \sum_{j=1}^k \nu(E_j) \quad \text{— אינטגרל — סופי}$$

גרסה (נספח) של פתרון היא שהיה אינדיקטור חזק - הכלל לא נכונה
 פתרון של $A+x$ מציג פתרון $\exists x \in R$ ו"נ" $V(A+x) = V(A)$

$\psi(A+x) = \psi(A)$ 179, $R \ni x$ 67 13015 2232 $A+x$ 20 56 13015

GOLDEN

המשפט הראשון: $w: \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}_+$ היא פונקציה קונקבה

דבר דלגלג דהבאל: / אפי' ימי' — ס'ל' —

2. ω כל יום יאמר

$$\omega([0,1]^n) \neq 1 \quad .3$$

שטח $\omega = 2\pi$ וזוהי הנקודה הנדרשת.