בהינתן זרימה $f$ · בונים רשת שיורית $G_f=(V,E_f)$. $E_f$ מכילה קשתות מקוריות $(u,v)$ עבורן $f(u,v)<c(u,v)$, ואנטי קשתות $(v,u)$ עבורן $f(v,u)>0$

הקיבול השיורי $c_f(u,v)=c(u,v)-f(u,v)$

הנוסחה גם לקשתות וגם לאנטי קשתות.

<u>מסלול משפר P</u>: מסלול מ-s ל-t ב-$G_f$. הקיבול השיורי של P

$$0<c_p=\min c_f(u,v),\ (u,v)\in P$$

ומשפרים את f רק על $(u,v)\in P$

$$f^*(u,v)=f(u,v)+c_p$$

וכל שאר הקשתות ללא שינוי, ומעט האנטי קשתות של המסלול.

<u>טענה</u>: $f^*$ זרימה חוקית $|f^*|=|f|+c_p>|f|$

אילוץ קיבול לכל קשת $(u,v)$ $f^*(u,v)\le c(u,v)$

אם $(u,v)$ קשת מקורית במסלול המשפר

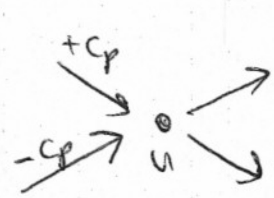
$$f^*(u,v)=f(u,v)+c_p\le f(u,v)+c_f(u,v)=$$
$$f(u,v)+\big(c(u,v)-f(u,v)\big)=c(u,v)$$

אם $(u,v)$ קשת מקורית + $(v,u)\in P$

$$f^*(v,u)=f(v,u)+c_p$$
$$0\le f^*(u,v)=-f^*(v,u)=-f(v,u)-c_p$$
$$=f(u,v)-c_p\le c(u,v)$$

וגם $0\le$ (הקטנו)

$$c_f(v,u)=f(u,v)\ge c_p$$




<u>חוק שימור הזרימה</u>

מספיק לוודא ש $u\in P$

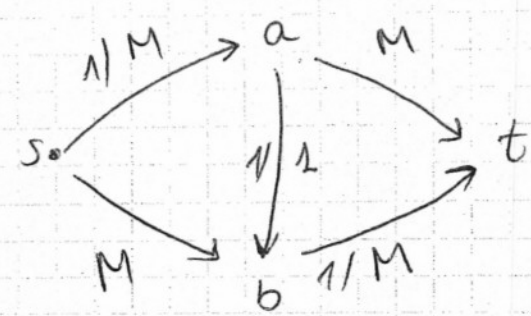
אז נסתכל מה יוצא מ-s. הקשת הראשונה ב-P היא קשת מקורית
ולכן לאורכה הזרימה מוגדלה ב-$c_p$ ⇐ הזרימה היוצאת מ-s גדלה ב-$c_p$.

כאשר $f \equiv 0$ ⇐ $G_f = G$

האלגוריתם של ford-fulkerson לא מציין איך מוצאים את המסלול מ-s ל-t
(בשיררה, את) למשל נמצא ע"י BFS.

נרצה להוכיח
① עצירת אלגוריתם.
② נכונות - כשעוצר, $f$ מקסימלי.

---

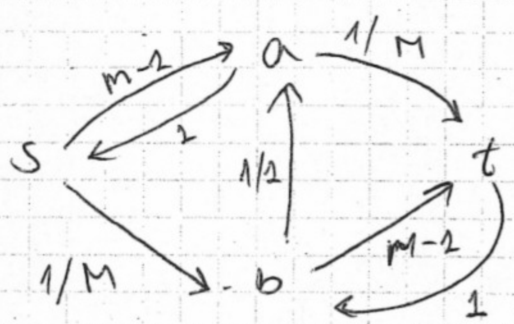



M גדול מאוד.
מה ידוע - הזרימה האפשרית הגבוהה מ-s ל-t $2M$.

דרך חכמה שבה FF יכול לעבוד?
בהתחלה ניקח $s \to a \to t$, ואחרי נשפר את הוספת המסלול השיורי $s \to b \to t$ וסיימנו.
דרך לא חכמה:
$P = (s, a, b, t)$
$c_p = 1$

מהי הרשת השיורית המתקבלת?

$G_f =$




$P = (s, b, a, t)$
$c_p = 1$

וכך הלאה, בצעדים הזוגיים היא תהיה קשת שיורית מ-b ל-a
אי-זוגיים " " " מ-a ל-b.

האלגוריתם בצורה זו יקח $2M$ צעדים, כי בכל צעד נגדיל זרימה בגודל 1 בלבד.
למעשה אם הקיבולים הם אי רציונלים, אפשר לבנות ל-FF לא עוצר (יש דוגמא אפילו
שתורכשה לערך הגבוה זמן לכן (גרף). ⇐ מתקבלת זרימה מתכנסת אבל שלא מתמצאת לערך הזרימה
המקסימלית.

אם G הקיבולים רציונליים, נעשה מכנה משותף ונתייחס לכולם כשלמים (נחלץ מהמכנה המשותף). במקום $\frac{7}{12}$, $\frac{5}{12}$. נתייחס ל 7, 5.

אם G הקיבולים שלמים ← FF תמיד יעצור.

מספר הצעדים (צעד = בניית צעד אחד של הלולאה: בניית רשת שיוריות ומציאת מסלול משפר בה). קטן שווה לערך הזרימה המקסימלית $|f^*|$.

(הוכ) באינדוקציה נוכל כך שהקיבולים תמיד נשארים שלמים.

לכן בכל צעד $c_p \geq 1$, ולכן כל צעד מגדיל את ערך הזרימה במספר שלם $\geq 1$.

מספר צעדים $\leq |f^*|$ צעדים. (זה לא טוב לנו כי זה תלוי בקיבולים, לכן אנחנו רוצים לחפש זמן שלא יהיה תלוי ב-").

---

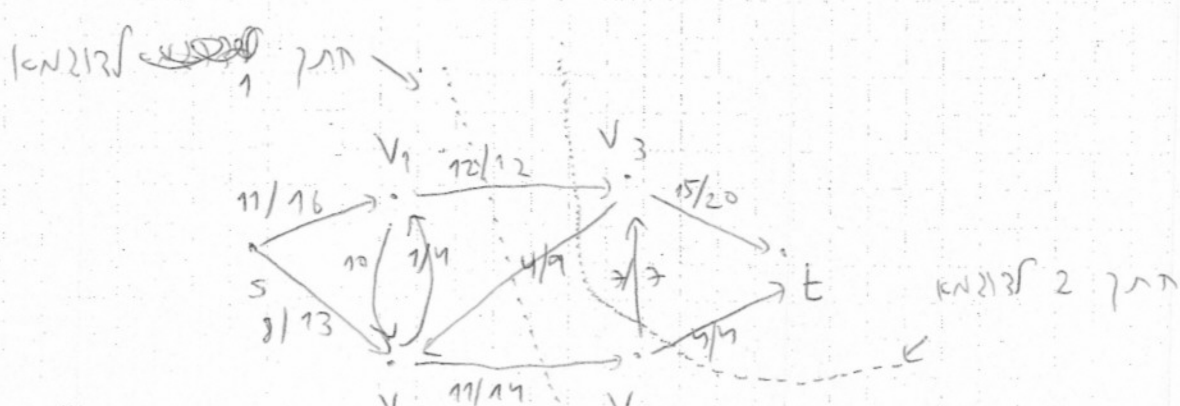
לפני שנמשיך ונשפר בזמן ריצה, נוכיח נכונות

נרצה להוכיח שאם אין מסלול משפר ב- $G_f$ אז f מקסימלית

משפט: MAX FLOW-MIN CUT

חתך מינ' זרימה מקס'

חתך (cut): חלוקה של V לשתי קבוצות זרות (S,T) כך ש $s \in S$ ו- $t \in T$.




עבור חתך נרצה להגדיר 2 דברים:

1. הקיבול של חתך (S,T), מסומן ב- c(S,T)

2. הזרימה דרך החתך $(S,T)$, מסומנת כ- $F(S,T)$.

הגדרות:

$$F(S,T)=\sum F(u,v) \quad , \quad C(S,T)=\sum_{\substack{u\in S\\ v\in T\\ (u,v)\in E}} C(u,v)$$

בחתך 1 לדוגמא (עמוד קודם): $C(S,T)=26$. (לא מתחשבים בקשתות מ-T ל-S)

$F(S,T)=19$ (כן " " " ")

לפי ההגדרות שהגדרנו
(עם הזרימה השלילית)

טענה: אם $f$ זרימה ב-$G$ ו-$(S,T)$ חתך: $|F|=F(S,T)$

למשל (חתכים פשוטים) $S=\{s\}$, $T=V\setminus\{s\}$ ; $S=V\setminus\{t\}$, $T=\{t\}$ (מקרים טריוויאליים שמתקיימת)

הוכחה:

$$F(S,T)=F(S,V\setminus S)=F(S,V)-\underbrace{F(S,S)}_{0}=$$

$$=F(S,V)=\underbrace{F(\{s\},V)}_{\substack{\text{זה ערך הזרימה!}\\ =|F|}}+\underbrace{F(S\setminus\{s\},V)}_{=0}=|F|$$

כי:

$$F(S\setminus\{s\},V)=\sum_{\substack{u\in S\setminus\{s\}\\ u\neq s,t}}\underbrace{F(u,V)}_{\substack{=0 \text{ בגלל}\\ \text{שימור הזרימה}}}=0$$

טענה: אם $f$ זרימה ב-$G$ ו-$(S,T)$ חתך: $F(S,T)\le C(S,T)$

(מן הכלל של אילוץ הקיבול)

הוכחה: בשלב נראה כל קשת $(u,v)$ כך ש: $u \in S$, $v \in T$.

אם $(u,v)$ קשת מקורית: $f(u,v) \le c(u,v)$

ואם $(u,v)$ אינה קשת, כלומר $(v,u)$ קשת: $c(u,v)=0$

$f(u,v)=-f(v,u) \le 0 = c(u,v)$

מ-2 הסקנו: ערך כל זרימה $\le$ קיבול כל חתך

$\Downarrow$

ערך זרימה מקס' $\le$ קיבול מינ' של חתך

(משפט MAXFLOW-MINCUT יראה שיש שוויון)

בחתך 2 לדוגמא, $c(S,T)=12+7+4=23$

משפט MAX FLOW-MIN CUT:

3 התנאים הבאים שקולים לזרימה $f$ ברשת $G$:

1. $f$ זרימה מקס'.
2. ברשת השיורית $G_f$ אין מסלול מ-s ל-t.
3. $|f|=c(S,T)$ לאיזשהו חתך $(S,T)$.

הוכחת המשפט:

$1 \Rightarrow 2$: במילים אחרות אם $f$ זרימה מקס', אין מסלול משפר. ברור כי לו היה מסלול משפר היינו יכולים להגדיל את ערך הזרימה.

$2 \Rightarrow 3$: נניח שב-$G_f$ אין מסלול מ-s ל-t ונבנה חתך $(S,T)$ ונשים ב-S את כל הצמתים הנגישים מ-s ב-$G_f$ וב-T את כל השאר.

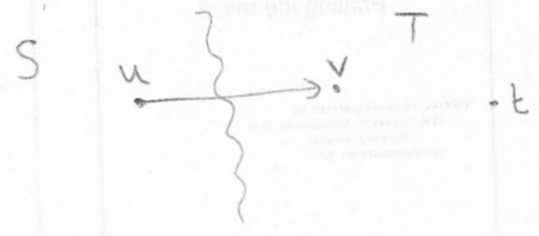
ברור כי $s \in S$, ו-$t \in T$ (כי לפי הנחה לא נגיש מ-s)

נראה $|f|=c(S,T)$

בנוסף: $f(S,T)=c(S,T)$ (שזהו לפי למה שהוכחנו)

ונראה זאת לכל הקשת בחתך.

$(u,v)$ קשת בחתך, $u\in S$, $v\in T$ ונראה: $f(u,v)=c(u,v)$




אם $(u,v)$ קשת מקורית ונניח בשלילה $f(u,v)<c(u,v) \Leftarrow$

$\Leftarrow c_f(u,v)>0 \Leftarrow (u,v)\in E_f \Leftarrow$ אם $u$ נגיש מ-$S$ ב-$G_f$

אז גם $v$ נגיש מ-$S$, בסתירה לכך ש: $v\in T$.

אם $(u,v)$ אנטי-קשת, כלומר $(v,u)$ קשת, נראה $f(v,u)=f(u,v)=0$.

כי אם לא $-f(v,u)<0$ אז $f(u,v)<0$ ו- $(u,v)\in E_f$ וכמו קודם

$u$ נגיש מ-$S$ וסתירה.

$3\to1$: הוא אומר שאם $f$ שווה לקיבול בחתך כלשהו, אז היא מקס'.

מיידי, כי כל זרימה $|f|\le c(S,T)$ ולכן $|f|$ מקס'.

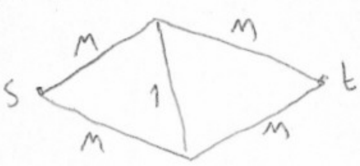
זה נותן לנו שיטה יעילה לבדוק אם הזרימה מקס', או להציג מה צריך להיות הזרימה המקס' (ע"י הסתכלות בחתך מינ')

הצעד הבא הוא לשפר ביעילות.

כרגע הבעיה היא שאין לנו דרך לחסום את מספר האיטרציות כפונ' של $|V|$ ו-$|E|$.

הרעיון: לחפש מסלולים שעוברים קצרים ביותר מבחינת הקשתות.

(הוא הציג מהתבוננות כזו:)



לא ברור לגמרי כעת למה זו הדרך הנכונה, אבל מסתבר שכן.

את המסלולים הקצרים ביותר מבחינת הקשתות נמצא כמובן ע"י שימוש ב- BFS על הרשת השיורית.

כעת נחסום את מס' האיטרציות של האלג' = מס' המסלולים המשפרים.

אם נמצא חסם על מס' המסלולים המשפרים אז:

- נראה שהוא עוצר

- " " של הזרימה המקס' (לא שפר ...min - ...MAX)

- עלות האלג' תהיה מס' האיטרציות x עלות BFS

$$\underbrace{\text{BFS}}_{O(|E|+|V|)}$$

$$= O(|E|)$$ כי הגרף קשיר לפי הנחה

נוכיח שמס' האיטרציות הוא: $O(|V|\cdot|E|)$ ולכן זמן הריצה יהיה: $O(|E|^2|V|)$

זה לא מי-יודע-מה, כי אם $E=\Theta(|V|^2)$ אנחנו מקבלים $O(|V|^5)$...

מה האלג' עושה?

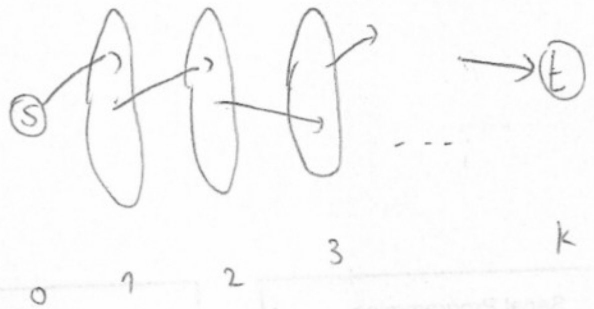
אנחנו מריצים BFS על הרשת השיורית, $G_F$, מ-s.

נסמן ב- $\delta_f(s,v)$ את המרחק מ-s ל-v ב- $G_f$ (מבחינת מס' קשתות).

BFS בונה שכבות. s בשכבה ה-0. בשכבה i כל הצמתים הם במרחק i מ-s, ונמשיך עד שנגיע ל-t (אם לא נגיע זה טוב, כי אז זה אומר שאין מסלול משפר).

t ימצא בשכבה k ואז בעצם נתעלם מכל הצמתים האחרים שעד k נתגלו. כמו כן, גם בשכבה ה-k נחזיק רק את t.

נשמור על קשתות רק משכבה לשכבה הבאה (הן היחידות שמשתתפות במסלול משפר) ונקבל רשת שכבתית (layered network)




$\delta_f(s,t)=k$

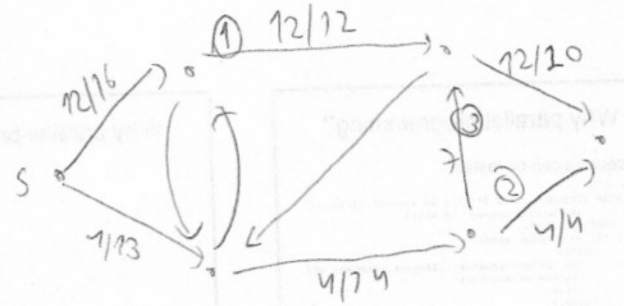
הרעיון המרכזי בהוכחת הסיבוכיות היא הטענה (אותה מטה) הבאה להוכחה, ממנה הכל נובע:

טענה: אחרי כל איטרציה, לכל צומת v, המרחק $\delta_f(s,v)$ עולה (חלש)

בפרט המרחק $\delta_f(s,t)$ = מס' השכבות, עולה (חלש)

תרגיל קל להבנת העניין (הטענה):

(* תרגיל 2)
התייחסות בהמשך




נחפש מסלול שפור קצר ביותר ונוציא את המסלול. ① יצא מטה למעלה

נמשיך ונמצא עוד מסלול באורך 3 ונמצא את התחתון. ② יוצא.

נמשיך ונמצא מסלול באורך 4, ומכאן אין עוד (הגענו לזרימה מקס').

הוכחה: נניח בשלילה שזה לא נכון ונסתכל על האיטרציה הראשונה שזה קרה, כלומר מצאנו צומת v ~~~~ שעבורו: $\delta_f(s,v) < \delta_{f'}(s,v)$

כאשר f' - הזרימה בשלב אחד קודם.

ונבחר v כזה הכי קרוב ל-s, כלומר עם $\delta_f(s,v)$ מינ'

(כי יכול להיות שיש כמה כאלה, אז נבחר את ההכי קרוב.

ואם יש כמה הכי קרובים באותו מרחק, נבחר שרירותית אחד)

מסלול נוכחי ב- $G_f$ מ-s ל-v:

$s \to \cdot \to \cdot \to \cdot \to u \to v$

$\delta_f(s,u) = \delta_f(s,v) - 1$ . $u \in$ צומת טוב (תזכורת: $\delta_f(s,u) \ge \delta_{f'}(s,u)$)

$(u,v) \in E_f$ . האם $(u,v) \in E_{f'}$ ?

נניח שכן: 1) $(u,v)$ קשת מקורית, $f'(u,v) < c(u,v)$

2) $(u,v)$ קשת אחורית, $f'(v,u) > 0$

מהגדרת $\delta_{f'}(s,v) \le \delta_{f'}(s,u) + 1$ כי $(u,v) \in E_{f'}$

$\le \delta_f(s,u) + 1 = \delta_f(s,v)$

כי $u$ צומת טוב

ולכן $v$ צומת טוב (בניגוד להנחה)

ולכן $(u,v) \notin E_{f'}$ אם $(u,v) \in E_f$

זה יכול להיות רק אם הקשת היתה על המסלול המשפר מ-$f$ ל-$f'$:

$G_{f'}$:

$$s \to \cdots \to \underbrace{u \to v}_{\text{הראנו שלא יכול להיות}} \to \cdots \to t$$

$\Downarrow$

$$s \to \cdots \to v \to u \to \cdots \to t$$

מוכל ב-$G_f$

$$\delta_f(s,v) - 1 = \delta_f(s,u) \ge \delta_{f'}(s,u) = \delta_{f'}(s,v) + 1 \ge \delta_f(s,v) + 1$$

$\Downarrow$

סתירה!

אבל: האלג' מבצע $O(|E||V|)$ איטרציות (מסלול משפרים).

הוכחה: (נתפוס קשת ונראה מה קורה לה במהלך האלג')
כאשר משפרים לאורך מסלול, לפחות קשת אחת עליו
(ע"מ) נהיית רוויה - זו היא אחת הקשתות שקיבולה
השיורי $= c_p$ (יתכן שיש כמה קשתות כאלו).
בתרשים 2 באיטרציה הראשונה זו היתה ①, אח"כ ②
באיטרציה השנייה ③.

קשת כזו לא מופיעה ברשת השיורית הבאה.
נראה לקשת כזו קשת קריטית.

לכאורה שיקול כזה יגיד שמספר האיטרציות הוא $|E|$, אבל
זה לא נכון! כי קשת שלא ברשת השיורית יכולה לחזור
אח"כ במהלך האלג'.
אנחנו רוצים להסיק את מספר הפעמים שקשת קריטית יכולה
לחזור לרשת השיורית. ניקח $(u,v)$ ונחסום מלמעלה מס' זה.
נראה שזה קורה (החזרה שלה) $\leq$ בערך $\frac{|V|}{2}$ פעמים.

ואז: יש לנו $|E|$ קשתות $\xRightarrow{\text{אחרי}}$ $O(|E||V|)$ שיפורים סה"כ.

כעת נוכיח את מה שנאמר לנו (מס' חזרות של $(u,v)$ לרשת השיורית):

$(u,v)$ נעלמה מהרשת השיורית אחרי ששיפרנו לזרימה $f$.
טענה היא היתה ברשת של $f$ אבל לא בבאה.
טענה היא על מק"ב ב- $G_f$ מ-s ל-t (מסלול משפר) וקיים

$$\delta_f(s,v)=\delta_f(s,u)+1$$

ויותר מאוחר היא חוזרת. (כאשר משפרים מזרימה $f'$ הבאה

(זו בדוק א
הזרימה
הבאה

בדיוק כמו קודם, היא יכולה לחזור רק אם $(v,u)$ (ההפוכה) הייתה ב המסלול המשפר (שהוא מקו״צ) ב-$G_{f'}$.

$\Leftarrow$

$$\delta_{f'}(s,u)=\delta_{f'}(s,v)+1$$

(מן היפוך תפקידים)

המרחק ב-$f'$ גדול-שווה למרחק ב-$f$ (מהטענה הקודמת):

$$\delta_{f'}(s,u)=\delta_{f'}(s,v)+1 \geq \delta_{f}(s,v)+1=\delta_{f}(s,u)+2$$

$\Leftarrow$ בין יציאה של הקשת לכניסה מחדש, מרחק $u$ מ-$s$ גדל לפחות ב-2 ולכן זה יכול לקרות $\leq \frac{|V|-1}{2}$ פעמים.

$\Leftarrow$ כל קשת יוצאת מהרשת $\leq \frac{|V|-1}{2}+1$ פעמים.

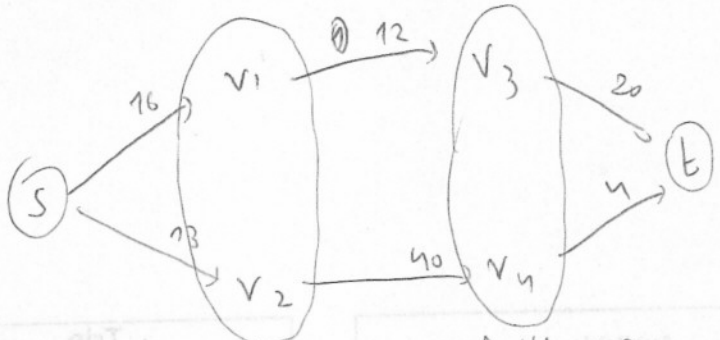
לגרסה זו של FF (בה משתמשים ב-BFS לחיפוש מסלולים קצרים ביותר) קוראים האלג' של Edmonds-Karp.

ניתן טיפה מוטיבציה לקראת האלג' הבא (שיעור הבא) שהוא יותר יעיל.

שימו לב ש-FF (והגרסה הנ״ל) עושים משהו די יעיל: יוצרים רשת שיורית, עוברים עליה, יוצרים חדשה, זורקים אותה... ואין מחזור שלה.

בדוגמא 2, אחרי שמצאנו את המסלול העליון, למה זרקנו את הרשת השיורית? אם לא היינו זורקים אותה עדיין היינו מוצאים את המסלול התחתון...

נבנה רשת שיורית $G_f$, נריץ עליה BFS ונקבל רשת שכבתית:




כי היא הרשת השכבתית (המסלול).

נחפש בה מסלול משפר ונמצא את העליון, נזרים בו כמה שאנו יכולים (12) וכעת 0 יוצאת מכלל שימוש ונוציא אותה. אך לא צריך את הרשת ~~השכב~~ השכבתית. נחפש בה שוב ונמצא את המסלול התחתון.

כעת נחפש שוב ולא נמצא מסלול מ-s ל-t ואז $\underbrace{\text{נצטרך}}_{}$ (רק עכשיו!) לזרוק את הרשת השכבתית, הרשת השיורית ולהתחיל שוב.

נראה שזה משפר לנו מ-$O(|V|\cdot|E|)$ ל-$O(|V|)$!