23/12/08

אלגוריתמים - שיעור 8

אלגוריתם FLOYD-WARSHALL

ממספרים את הקודקודים באופן שרירותי: $1,2,3,\dots,n=|V|$

נסתכל על מק"ב מ-i ל-j. נניח שהאינדקס המקסימלי במק"ב הוא k.
אז נאמר שהמק"ב הוא בגובה k.

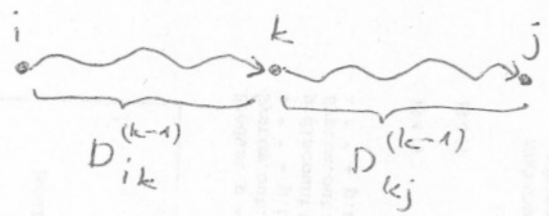
(הבהרה: k מקסימלי מבין הצמתים הפנימיים במק"ב. ייתכן כי $k<i,j$.)

העקרון הבסיסי באלגוריתם הוא לבנות מק"בים לפי גובה עולה.
כלומר, לכל k,i,j נחשב את אורך המסלול הקצר ביותר מ-i ל-j, בגובה $\leq k$. נעשה זאת לפי k עולה מ-0 ל-n. בסיום, כאשר $k=n$ (כלומר, אין אילוץ על המסלולים) נקבל את כל המק"בים.

נסמן: $D^{(k)}_{ij}$ = אורך המסלול הקצר ביותר מ-i ל-j בגובה $\leq k$.

נבחין כי $D^{(0)}=W$ (זהו שוויון מטריצות). זאת כי $D^{(0)}$ מתארת את אורכי המסלולים שאין בהם קודקודים פנימיים.

נבנה את $D^{(k)}$ מתוך $D^{(k-1)}$: $D^{(k)}_{ij}$ שווה ל- $D^{(k-1)}_{ij}$ או לאורך מינימלי של מסלול מ-i ל-j שגם עובר דרך k ושאר הצמתים בו $\leq k-1$.
מסלול כזה חייב להיות מק"ב בגובה $\leq (k-1)$ מ-i ל-k, שמשורשר אליו מק"ב בגובה $\leq (k-1)$ מ-k ל-j.



כלומר, בניית $D^{(k)}$ נעשית כך:

$$D^{(k)}_{ij} = \min\left\{ D^{(k-1)}_{ij} ,\ D^{(k-1)}_{ik} + D^{(k-1)}_{kj} \right\}$$

זמן הריצה: $O(|V|^3)$.

(מי שלמד את הקורס "מודלים חישוביים", עשוי להיזכר בחיבה בהוכחה לכך שכל שפה רגולרית מיוצגת ע"י ביטוי רגולרי.)

האלגוריתם הוא דוגמה לשיטה שנקראת <u>תכנות דינאמי</u> שעליה נלמד בהמשך הקורס.

אם המשקלות היו כולם אי-שליליים, יכולנו להריץ את אלג' דייקסטרה מכל צומת התחלה, ולשלם: $O(|V|^2\log|V| + |V|\cdot|E|)$

בגרף דליל, אפשרות זו עדיפה על אלו שראינו.

הרעיון של אלגוריתם ג'ונסון הוא להפוך את המשקלות לאי-שליליים, ואז להריץ את דייקסטרה $|V|$ פעמים.

<u>טענה:</u> תהא h פונקציה כלשהי על הצמתים $h: V \to \mathbb{R}$, ונגדיר משקלות חדשים $w^*(u,v) = w(u,v) + h(u) - h(v)$ לכל קשת (u,v). אזי מסלול הוא מק"ב תחת w^* אמ"מ הוא מק"ב תחת w.

<u>הוכחה</u>

נביט במסלול π, שהצמתים בו הם: $v_1, v_2, v_3, \dots, v_k$

אזי:

$$w(\pi) = w(v_1,v_2) + w(v_2,v_3) + \dots + (v_{k-1}, v_k)$$

מצד שני:

$$\begin{aligned} w^*(\pi) &= w(v_1,v_2) + h(v_1) - h(v_2) + \\ &+ w(v_2,v_3) + h(v_2) - h(v_3) + \\ &+ w(v_3,v_4) + h(v_3) - h(v_4 + \\ &+ \dots + \\ &+ w(v_{k-1},v_k) + h(v_{k-1}) - h(v_k) = \\ &= w(\pi) + h(v_1) - h(v_k) \end{aligned}$$

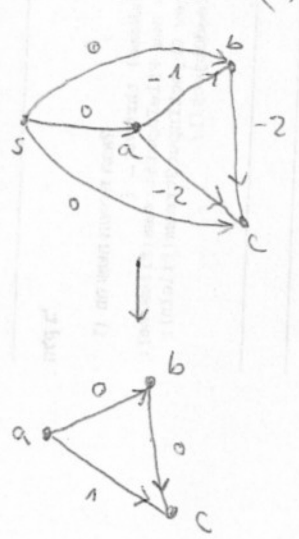
לכן למשקל כל המסלולים מ-v_1 ל-v_k התווספה אותה תוספת. □

הצעד הבא הוא לבנות פונקציה h כך ש- $w^* \geq 0$ תמיד, באופן מפורש, כדי לעשות זאת נשתמש באלגוריתם בלמן-פורד.

נבנה גרף חדש G': נוסיף צומת חדש s כצומת התחלה, ונוסיף את כל הקשתות מ-s לכל הצמתים של V. ניתן לכל קשתות אלה משקל 0.

נריץ בלמן-פורד (של מקור יחיד) על G' מ-s וניקח $h(v) = \delta(s,v)$

<u>דוגמה:</u>



$h(a) = \delta(s,a) = 0$

$h(b) = \delta(s,b) = -1$

$h(c) = \delta(s,c) = -3$

נראה ש~~אם~~ h זו אכן מתקיים תמיד $\hat{w} \geq 0$.

צ"ל שלכל קשת (u,v) מתקיים $w(u,v)+h(u)-h(v) \geq 0$.

באופן שקול ניתן לכתוב: $w(u,v)+\delta(s,u) \geq \delta(s,v)$

ואנו כבר יודעים שאי-שוויון זה אכן מתקיים!

זמן ריצה: $O(|V|^2\log|V| + |V|\cdot|E|)$

הסבר: - בלמן-פורד ממקור יחיד: $O(|V|\cdot|E|)$,

- $|V|$ פעמים הרצה של דייקסטרה, כ"א: $O(|V|\cdot\log|V|+|E|)$,

הערה: האלגוריתם של ג'ונסון משתמש בייצוג הגרף ע"י רשימת שכנות.

כעת נחזור טיפה אחורה, להשלמת פרטים:

הערות לגבי פלויד-וורשל

1) זיכרון: עקרונית האלגוריתם מייצר $n+1$ מטריצות: $D^{(0)},\dots,D^{(n)}$

בפועל, מספיקות שתי מטריצות, כמו שראינו בעבר.

למעשה, מספיקה מטריצה אחת, במובן שכל ערך חדש שחישבנו לאיזשהו $D_{ij}^{(k)}$ אפשר לשים ב- $D_{ij}^{(k)}$ עצמו, ובכך אנחנו רק משפרים את המרחקים, ולעולם לא נרד מתחת לאורך המק"ב האמיתי. לא ניכנס להוכחה.

2) האלגוריתם מחשב רק את אורכי המסלולים. אם רוצים גם את המסלולים עצמם, נשתמש במטריצה Π ע"פ הכלל הברור הבא:

כאשר אני מחשבים את D_{ij}^{k}, אם אנו שומרים את D_{ij}^{k-1} לא נשנה את Π_{ij}. אם אני משנים את הערך, נשים:

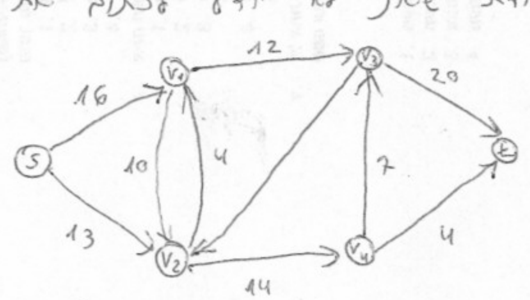
$$\Pi_{ij}^{(k)} \leftarrow \Pi_{kj}^{(k-1)}$$

"וכעת, למשהו אחר לגמרי"

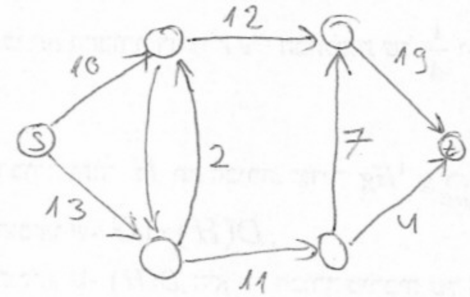
(אמר מיכה, ואף ציין שזהו ציטוט של מערכון של מונטי פייתון)

זרימה ברשתות Network Flow

(דוגמה שנשתמש בה לעתים: בגרף זה הצמתים הן ערים בקנדה, והנושא היא תעבורת מחבטי הוקי מוונקובר לעיר אחרת שאני לא יודע לכתוב את שמה.



המשקל של כל קשת מייצג את מספר המשאיות עמוסות המחבטים שיכולות לעבור דרך כביש זה ביממה. בערים אין מחסנים - כלומר, בכל זמן נתון מספר המשאיות שנכנסות לעיר צריך להיות שווה למספר המשאיות שיוצאות ממנה.
מטרתנו להעביר מספר מקסימלי של משאיות ביממה אחת מהמקור ליעד.
נראה דוגמה לזרימה בגרף ששרטטנו קודם:



סה"כ הזרמנו
23 משאיות

(מאוחר יותר נראה כי זו הזרימה המקסימלית בגרף.)
כעת נגדיר את הבעיה בצורה פורמלית:

<u>רשת זרימה</u>: גרף מכוון $G=(V,E)$ עם צומת מקור s וצומת מטרה t, וכן <u>קיבולים</u> חיוביים על הקשתות ($c(u,v)>0$ קיבול הקשת (u,v)).
באופן סתום, אם (u,v) אינה קשת, נאמר כי $c(u,v)=0$.
בפועל רק קשתות של E והקשתות ההפוכות להן (אנטי-קשתות שלהן) יזכו להתייחסות.
מניחים שלכל צומת נגיש מ-s ו-t נגיש מכל צומת (צמתים אחרים הם חסרי תועלת), בפרט, G הלא-מכוון קשיר, ולכן $|E|\ge|V|-1$.

<u>זרימה</u> היא פונקציה f על הקשתות: $f: V\times V\to\mathbb{R}$
(כלומר, אנו מגדירים אותה לכל זוג צמתים, אך בפועל ערכיה יהיו מעניינים רק עבור קשתות ואנטי-קשתות)

<u>זרימה חוקית</u> מקיימת:

1) אילוצי קיבול: לכל (u,v), $f(u,v)\le c(u,v)$
2) אנטי-סימטריה: לכל (u,v), $f(u,v)=-f(v,u)$
3) שימור הזרימה: לכל צומת u, $\sum_{v\in V} f(u,v)=0$ אלא אם כן $u\in\{s,t\}$

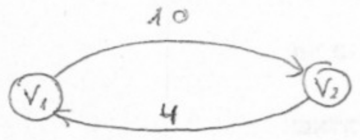
<u>הערות</u>:

1) לכל u, $f(u,u)=0$ בגלל האנטי-סימטריה.
2) אם (u,v) אינה קשת ואינה אנטי-קשת, אזי $f(u,v)=0$, משום שמתקיים $c(u,v)=0$ וכן $c(v,u)=0$.

<u>הערך</u> של זרימה f, שסימונו $|f|$, הוא סך כל הזרימה הנכנסת ל-t: $|f|=\sum_{u\in V} f(u,t)$
למשל, בזרימה שהראנו קודם, ערך הזרימה היה 23.

מטרתנו: למצוא זרימה חוקית עם ערך מקסימלי.

טיפול בקשתות אנטי-מקבילות



נניח שבגרף משמאל (שהוא גרף חלקי לגרף הדוגמה שלנו)
היינו מזרימים 7 מ-v_1 ל-v_2, ו-2 בכיוון ההפוך – זו הייתה עבודה מיותרת.
היינו יכולים לחבר את שני הזרימות לזרימה אחת: הזרימה האפקטיבית. במקרה
הזה הזרימה האופקטיבית מ-v_1 ל-v_2 היא 5, ובכיוון ההפוך -5.
זה חוקי, כי $-5 \le 4$

כעת נכניס לשימוש סימון מקוצר: יהיו $A,B \subseteq V$. אזי נסמן:

$$f(A,B) = \sum_{\substack{u\in A\\ v\in B}} f(u,v)$$

כאשר f היא פונקציית זרימה או קיבול.

לדוגמה, ניתן לכתוב את חוק שימור הזרימה כך: $f(\{u\}, V) = 0$

למעשה, נרשה לעצמנו לקצר עוד יותר: $f(u,V) = 0$

תכונות הסימון:

לכל שתי קבוצות X,Y וזרימה חוקית f, מתקיים: $f(X,Y) = -f(Y,X)$

הוכחה:

$$f(X,Y) = \sum_{\substack{u\in X\\ v\in Y}} f(u,v) = -\sum_{\substack{u\in X\\ v\in Y}} f(v,u) = -f(Y,X)$$

בפרט, $f(X,X)=0$ לכל קבוצה X.

אם $X\cap Y=\emptyset$, אזי:

$$f(X\cup Y, Z) = f(X,Z) + f(Y,Z)$$
$$f(Z, X\cup Y) = f(Z,X) + f(Z,Y)$$

דוגמה: נוכיח כי $|f| = f(s,V)$, כלומר, "מה שיוצא מ-s נכנס ל-t".

הוכחה:

$$|f| = \underbrace{f(V,t)}_{\text{לפי הגדרה}} = \cancel{f(\{t\}\cup(V\setminus\{t\}), t) = f(t,t) + f(V\setminus\{t\}, t)}$$

$$0 = f(V,V) = f(V, \{t\}\cup(V\setminus\{t\})) = f(V,t) + f(V, V\setminus\{t\})$$

$$\Rightarrow |f| = -f(V, V\setminus\{t\}) = f(V\setminus\{t\}, V) = f(s,V) + f(V\setminus\{s,t\}, V) =$$

$$= f(s,V) + \sum_{u\in V\setminus\{s,t\}} f(u,V) = f(s,V) + 0 = f(s,V)$$

כעת נראה אסטרטגיה לפתרון בעית זרימה ברשתות.

השיטה של Ford-Fulkerson

אתחול: $f(u,v)=0$ לכל (u,v).

כל עוד קיים מסלול משפר (מושג שטרם הגדרנו), נגדיל את f ע"י הזרמה נוספת לאורך המסלול.

<u>הגדרה:</u> "מסלול משפר" של זרימה הוא מסלול מ-s ל-t שאף קשת בו לא מנצלת את מלוא הקיבולת שלה.

(כדי לקבל אינטואיציה לגבי השיטה, כדאי לנסות להפעיל אותה על גרף הדוגמה)

נגדיר כעת מושג חשוב: <u>הרשת השיורית</u> (Residual network).

נניח שנתונה רשת זרימה G עם פונקציית קיבול c, וכן נתונה זרימה חוקית f.
נסמן ב-G_f את הגרף הבא: הצמתים הם אותם צמתים של G, הקשתות הן אותן קשתות או אנטי-קשתות שלהן, ולכל קשת (u,v) נגדיר קיבול-שיורי:

$$c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$$

מסלול משפר הוא מסלול מ-s ל-t ב-G_f (כאשר אנו משמיטים קשתות בעלות קיבול 0).

אם p מסלול משפר, נסמן ב-$c_f(p)$ את הקיבול המינימלי של קשת של p, ונקרא למספר זה "הקיבול השיורי של p".

אם p מסלול ~~[illegible]~~ משפר שקיבולו השיורי $c_f(p)$, נזרים דרך p זרימה נוספת בכמות $c_f(p)$. זה מגדיר לנו זרימה חדשה:

$$f^*(u,v) = \begin{cases} f(u,v) & (u,v)\notin p \\ & \text{(חוץ מאנטי-קשתות של קשתות } p\text{)} \\ f(u,v)+c_f(p) & (u,v)\in p \end{cases}$$