

האלגוריתם של דייקסטר (Dijkstra) (מוביל מחקר)

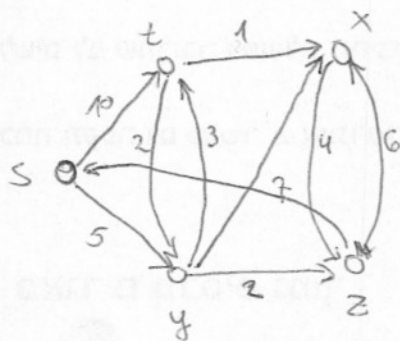
האלגוריתם מניח שכל המסקלות אי-שליליים. הוא מחשב את המרחק הקצר ביותר מ- s לכל קצוות הצמתים שבגרף הוצאן מהמרחק, ושקדום כבר חישובו את $d(s, v)$ (אם לא באמת חשב האלגוריתם, אבל ישמש אותו בהוכחה הנכונה). המפתח לפיו מקורה המרחק הוא $d[s]$.

לעכשיו קראנו את האלגוריתם

אתרי מוצאים מ- Q את הצומת המינימלי ומהצומת $RELAX$ את כל שכניו:

- אם $v \notin Q$ אין צורך ב- $RELAX$ ואין לו השפעה.
- אם $v \in Q$ וה- $RELAX$ משפר, זה גורר פואר $DECREASE-KEY(v)$.

דוגמה הרצה



Q:

s	t	x	y	z
0	1	∞	∞	∞
x	10	8		
	8	14	x	7
				x
		x	9	
			x	

("א" - פירושו "יצא מהמרחק")

מחירי הריצה: פואר על Q ו- $O(|V| + |E|)$.

למה הכלל ל'ארי (מחבר פואר המרחק)? כי אם כל קשת עוברת פעם אחת (מקרה המכונה) או שתיים (מקרה הכלל-מכונה).

פואר על המרחק: $RELAX$ פואר $|V|$ $EXTRACT-MIN$

$DECREASE-KEY$ פואר $2|E| \geq$

סיבוכיות כוללת: אם עדימה בינארית: $O((|V| + |E|) \log |V|)$

אם עדימה פינאנצ'ל: $O(|V| \cdot \log |V| + |E|)$

נכונות: טענה: כאשר מוצאים צומת u מהמרחק, מתקיים $d(u) = d(s, u)$.

הוכחה: באינדוקציה על סדר הוצאת הצמתים מ- Q . הצומת הראשון שיוצא הוא s , ומתקיים $d[s] = d(s, s) = 0$. נניח נכונה עד להוצאת

צומת v , ונסתכל מה קורה כש- v יוצא מ- Q .

נניח ש- v נגיש מ- S (אחרת $d[v] = \infty = \delta(s, v)$), ונסתכל על מק"ם מ- S אליו, נשתמש בקבוצה S של הצמתים שכבר יצאו מ- Q . v עדיין לא ה- S , אבל S כן. נעקוב אחר המק"ם עד הצומת הראשון מחוץ ל- S . יכול להיות שזהו v עצמו, אבל אולי לא. נסתכן בה- u ואת קוצמו ב- x . ברור כי $s \in x$, כלומר, x יצא קודם מ- Q . כאשר x יצא מ- Q , המק"ם (לפי הנחת האינדוקציה) $d(x) = \delta(s, x)$. את ~~התהליך~~ RELAX על הקצה (x, u) , ואחריו המק"ם $d(u) \leq d(x) + w(x, u)$. כלומר:

$$d(u) \leq \delta(s, x) + w(x, u) = \delta(s, u)$$

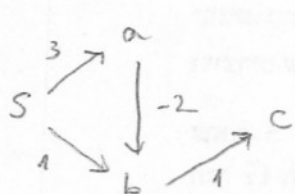
(השוויון האחרון מתקיים כי גת-מסלול של מק"ם הוא מק"ם).

מצד שני יתמיד נכון ההפך, ולכן למק"ם שוויון: $d(u) = \delta(s, u)$

אבל v יצא מ- Q לפני u , ולכן: $d(v) \leq d(u) \Rightarrow \delta(s, v) \leq d[v] \leq d[u] = \delta(s, u)$. אבל $\delta(s, v) = \delta(s, u) + \delta(u, v)$, ומאחר שמק"ם $\delta(u, v) \geq 0$ (לפי אי-שליליות המשקלים): $\delta(s, v) = d[v] = d[u] = \delta(s, u)$ ולכן מתקיים:

n.e.f.

נראה כעת דוגמה, כיצד הפעלה של אלגוריתם דייקסטר על גרף עם משקלים שליליים, אך בלי מעגלים שליליים, נכשלת.



s	a	b	c
0	∞	∞	∞
x	3	1	
		x	2

b יצא מהתור בלי שמק"ם $d[b] = \delta(s, b)$. b מיוקן ע"י relax עתיד, אך c זכתה נעבור לנרא חדש:

מק"מים בין כל צמתים הצמתים All-pairs Shortest Paths

אוצר הפתח הוא לפחות $\Theta(V^3)$. לכן, כבר לא מדובר באלגוריתמים מאונד יעילים (ליניאריים וקבוצה). ובהל זאת, יש אלגוריתמים יותר יעילים מהנ"ל, פרידמן נאליביי

נניח שיש משקלים שליליים (אבל לא מעגלים שליליים). נניח בלתי-פורז V פשוטים, כל סדר עם צומת אחר בתפקיד צומת ההתחלה s . זמן הריצה הוא $\Theta(V^3)$, שיכול להגיע ל- $\Theta(V^4)$.

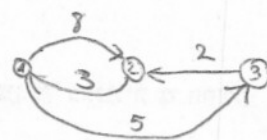
אם אין משקל, פליטים, נרשם את בייקטרה וזו פזמים, ונקרא סימוכיות (V^3) אלא היותר.

כאן נשתמש בהצגה הזו ע"י מטריצה שנקווה, (ועם את הפלט נייצג בצורה מטריציאלית).
ניתן לכתוב את סיבוכיות, ונקנה את המטריצה כקו:

$$W_{ij} = \begin{cases} 0 & i=j \\ \infty & (i,j) \notin E \\ W(i,j) & (i,j) \in E \end{cases}$$

(אם לא מטריצה שנקנה רשימה, אבל זו לא מטריצה כ"כ שורה)

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 5 \\ 3 & 0 & \infty \\ \infty & 2 & 0 \end{pmatrix}$$



צוואתה:

המטריצה D שבה D_{ij} מייצג את אורך המסלול מ- i ל- j .
הקצב ביותר שהתגלה עד כה.

אנחנו: $D \leftarrow W$

המטריצה Π של מצבים, שבה Π_{ij} מצביע על צומת הקודם ל- j .
המסלול הוא ביותר שהתגלה עד עתה מ- i .

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} NIL & i=j \\ NIL & W_{ij} = \infty \\ i & W_{ij} < \infty \end{cases}$$

אנחנו: ~~אנחנו~~

אלגוריתם קאמפון:

נחקה את האמן-פורד באופן מטריציאלי.

RELAX יתבצע באופן דומה לאק שהוא נעשה בעבר:

$$D'_{ij} \leftarrow \min \{ D_{ij}, D_{ik} + W_{kj} \}$$

$i \rightsquigarrow k \rightsquigarrow j$

נעשה זאת פעם אחת לכל הקטגוריות שנקבע ל- j (נשנה את k):

$$D'_{ij} \leftarrow \min_{1 \leq k \leq n} (D_{ik} + W_{kj})$$

(כאשר $j=k$, המסלול הפנימי שווה D_{ij})

זהו צעד אחד של האמן-פורד (באשר זה נעשה לכל i ואכל j).

אנו יוצקים גזם אין מציגים פליטים את קוקים ל-1 ו-1 איטרציות, ואנחנו נבצע 1-1 איטרציות.

הבעיה: $\min_{1 \leq k \leq n} \{D_{ik} + W_{kj}\}$ מציבים כפא מטריות

$$D'_{ij} = \sum_{k=1}^n D_{ik} \cdot W_{kj}$$

לכן נסמן מחדש $D' = D \circ W$, וכו'. $D^{(1)} = W, D^{(2)} = W \circ W, D^{(3)} = (W \circ W) \circ W \dots$

$$\begin{pmatrix} 0 & 8 & 5 \\ 3 & 0 & \infty \\ \infty & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 8 & 5 \\ 3 & 0 & \infty \\ \infty & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 3 & 0 & 8 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

דוגמה:

זמן חישוב: $O(|V|^3)$ לאיטרציה אחת, ובסה"כ $O(|V|^4)$.

בה עדיין לא מוצגת. אבל, אם נחשיב להכנס ולסמן $D^{(n)} = W^n$, נראה שצריך לה"ע את החישוב. למשל, אם W^8 נשן לחשב ע"י שלוש פעולות כפל: $((W^2)^2)^2$, ובאופן כללי, מספר ההכפלות שנדרשת לחישוב $(W^n)^2$ לוגריתמי ב-n, כדי להוכיח זאת, צריך להראות שה"כ" שהעברנו אסוציאטיבי. זה נכון בעצם אסוציאטיביות, קומוטאטיביות ודיסטריביוטיות החיבור והכפל.

בה עדיין לא מוצגת. אבל, אם נחשיב להכנס ולסמן $D^{(n)} = W^n$, נראה שצריך לה"ע את החישוב. למשל, אם W^8 נשן לחשב ע"י שלוש פעולות כפל: $((W^2)^2)^2$, ובאופן כללי, מספר ההכפלות שנדרשת לחישוב $(W^n)^2$ לוגריתמי ב-n, כדי להוכיח זאת, צריך להראות שה"כ" שהעברנו אסוציאטיבי. זה נכון בעצם אסוציאטיביות, קומוטאטיביות ודיסטריביוטיות החיבור והכפל.

בה עדיין לא מוצגת. אבל, אם נחשיב להכנס ולסמן $D^{(n)} = W^n$, נראה שצריך לה"ע את החישוב. למשל, אם W^8 נשן לחשב ע"י שלוש פעולות כפל: $((W^2)^2)^2$, ובאופן כללי, מספר ההכפלות שנדרשת לחישוב $(W^n)^2$ לוגריתמי ב-n, כדי להוכיח זאת, צריך להראות שה"כ" שהעברנו אסוציאטיבי. זה נכון בעצם אסוציאטיביות, קומוטאטיביות ודיסטריביוטיות החיבור והכפל.

הערה: בלמען פורד מפרט 1-|V| איטרציות ואנחנו 2-|V| כי האחרון שלנו הוא כמו איטרציה ראשונה של בלמען פורד.

הערה:
1) אם יש מעגלים שליליים, נעלה אותם "כלי לחשוב" כמו בלמען פורד - נכפיל בעצם נוספת, ונבדוק אם איננו עדין שלילי קטן ממש, אם כן, יש מעגל שלילי, ואם לא אז אין.

לחישוב, נשן לבדוק אתנו שמעגל בתצורה 1-|V| אם יש בתוכו חישוב שלילי $D_{ij} < 0$. אם כן, יש מעגל שלילי ואם לא אז אין.

2) המטריות D מתעצבות בקו אחד צעד של "הכפל" אם $D'_{ij} < D_{ij}$ נקח את A ששן את הערך המינימלי החדש של D_{ij} , ונשים $A \leftarrow D_{ij}$. (אם אנחנו מוחלטים למקרה של מקור יחיד)

3) דוגמה כל הסיפור עם כפא מטריות. מותר, אם נשן EXTEND_SH_PATHS כקלט שתי מטריות A, B שמקוצצות מסלולים, נקבל $\min_{1 \leq k \leq n} \{A_{ik} + B_{kj}\} \rightarrow C_{ij}$

לדוגמה, המסלולים הקצרים ביותר שהם צירוף של מסלול A ומסלול B. אם $A=B$, כמו אנחנו במטריצות, אנו בעצם מנפים כל בעיה מסלולים באזור כפול ממה שניסנו קודם.

(4) בחינה העברה, עדין Π מוגדר באופן הבא: כאשר

$$D'_{ij} = \min \{D_{ik} + D_{kj}\} < D_{ij}$$

נמצא את ה- k שהביא למינימום:

$$\Pi'_{ij} \leftarrow \Pi_{kj}$$

(5) אין בעצם צורך ליצור מעקים חדשים של D .

(א) באופן נאיבי מספיקים שניים. כל מוצא חדשה נושאת בעתה האחר.
(ב) מספיק עמק אחד.