9/12/08

אלגוריתמים - שיעור 6

בתום השיעור הקודם, ראינו שתמיד מתקיים $d(v) \ge \delta(s,v)$. נמשיך כעת לפתח תכונות של אלגוריתמים מבוססי RELAX.

עץ המק"בים

במהלך האלגוריתם מתעדכנים מצביעי π בכל RELAX משפר.

טענה: בכל רגע שהוא, מצביעי π יוצרים עץ מכוון כלפי השורש, והשורש הוא s (בהנחה שאין מעגלים שליליים).

יש לציין, שהכוונה למצביעי π שאינם NIL, אך עם הקודקוד s.

בתחילת האלגוריתם זה נכון במובן שהעץ הוא ריק ומכיל רק את s.

הוכחה: הגרף המורכב ממצביעי π הוא קשיר וחסר מעגלים (גם אם נתעלם מהכיוון). לכל צומת u עם מצביע $\pi \ne NIL$ קיים מסלול המתקדם דרך המצביעים:

$u \to u_2 \to u_3 \to \dots$

1) אם המסלול מסתיים בצומת u_k כך ש: $\pi(u_k)=NIL$,
אז: $u_k = s$, הוכחה: $\pi(u_{k-1})=u_k$. ההשמה הזו ל-$\pi(u_{k-1})$ קרתה בעקבות RELAX משפר על הקשת (u_k,u_{k-1}). כלומר רגע קודם התקיים:

$d(u_k)+w(u_k,u_{k-1}) < d(u_{k-1})$

ובפרט באותו רגע התקיים $d(u_k)<\infty$.
בפעם הראשונה ש-$d(u_k)$ מקבל ערך סופי זה קורה ב-RELAX משפר, ואז $\pi(u_k)$ מקבל ערך $\ne NIL$ ולעולם לא יקבל NIL (עבור $u_k \ne s$) ולכן המסלול חייב להיתקע ב-s - $u_k=s$.

2) נראה כי אין מעגל. נניח כי היה מעגל $u_1 \to u_2 \to \dots \to u_k \to u_1$.
בה"כ נניח שההשמה $\pi(u_{k-1})=u_k$ היא האחרונה שהתבצעה במעגל.
באותו רגע, כל ההשמות $\pi(u_{i-1})=u_i$ קיימות, וכן $\pi(u_k)=u_1$.
נסתכל במצב רגע לפני ההשמה $\pi(u_{k-1})=u_k$. כלומר, עומד לקרות RELAX משפר על (u_k,u_{k-1}), וכרגע:

$d(u_{k-1}) > d(u_k)+w(u_k,u_{k-1})$

לכל i אחר, ההשמה $\pi(u_i) \leftarrow u_{i+1}$ התבצעה ב- RELAX משפר קודם,
ומ"ב אחריו קיים $d(u_i) = d(u_{i+1}) + w(u_{i+1}, u_i)$
וזהו ערכו של $d(u_i)$ גם ברגע סגירת המעגל. עם זאת, יש לשים לב
שאולי הערך של $d(u_{i+1})$ שופר לאחר מכן, ולכן השוויון שכתוב לעיל
לא בהכרח ממשיך להתקיים. אך מאחר שערך הביטוי באגף הימני
של השוויון יכול רק לקטון עד סגירת המעגל, בהכרח יתקיים:

$$d(u_i) \geq d(u_{i+1}) + w(u_{i+1}, u_i)$$

וזה מתקיים לכל ה-i-ים האחרים,
נחבר את כל האי-שוויונים לכל ה-i-ים (כולל עבור $d(u_{k-1})$ שמופיע בתחתית
העמוד הקודם):

$$\sum_{i=1}^{k} d(u_i) > \sum_{i=1}^{k} \left(d(u_i) + w(u_{i+1}, u_i)\right)$$

$$\Rightarrow 0 > \sum_{i=1}^{k} w(u_{i+1}, u_i)$$

וזהו מעגל שלילי, בסתירה להנחה שאין מעגלים שליליים!
(זה שולל את האפשרות של קיום מעגל מכוון. מדוע אין מעגל לא-מכוון?
כי במעגל כזה היה חייב להיות צומת שיש לו שתי קשתות יוצאות, מה שלא
יתכן).
הראינו כי הגרף קשיר (קיים מסלול מכל צומת ל-s) וחסר מעגלים, ומכאן
הוא עץ. מש"ל.

נניח שהאלגוריתם מסתיים, ושבסיום $d(u) = \delta(s,u)$. נסתכל על הגרף G_π
שקשתותיו הן מצביעי π: זהו עץ מכוון ששורשו s, וגם:
א) הצמתים שלו הם בדיוק אלה הנגישים מ-s.
ב) לכל צומת u בעץ, המסלול מ-s אליו הוא מק"ב.

<u>הוכחה:</u>

א) נניח v נגיש מ-s, כלומר $\delta(s,v) < \infty$, ולפי ההנחה $d(v) = \delta(s,v) < \infty$. מכאן
$\pi(v)$ קיבל ערך $\neq$ NIL, ולכן v בעץ, ולהיפך באותו אופן.
ב) נוכיח באינדוקציה על אורך המסלול k:
אם $k=0$ זהו s. המסלול הוא ריק, משקלו 0, והוא אכן מק"ב מ-s ל-s.
נניח נכונות עד $k-1$ ונבדוק ל-k:

בסיום, $\pi(u_i)=u_{i-1}$ ולכן כמו קודם, קיים בסיום;

$$d(u_i) \ge d(u_{i-1}) + w(u_{i-1}, u_i)$$

לכל $1 \le i \le k-1$.

אם נחבר את כל האי-שוויונים מצורה זו, יצטמצמו כל האיברים מהצורה $d(\cdot)$ למעט הראשון והאחרון. אך הראשון הוא $d(s)=0$ ולכן נשאר לנו:

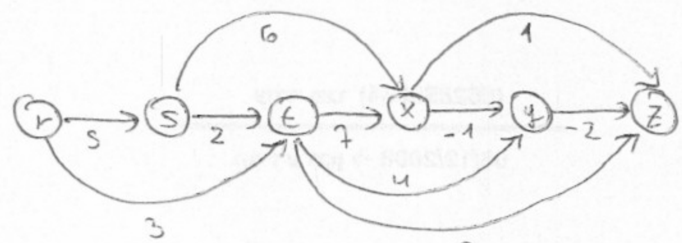
$$d(u) \ge \sum_{i=1}^{k} w(u_{i-1}, u_i)$$

נשים לב שלפי ההנחה, האגף השמאלי שווה ל-$\delta(s,u)$, בעוד שהאגף הימני ~~האורך~~ משקל מסלול מ-s ל-u. לכן מסלול זה ח"ב להיות מק"ב.

החשיבות של המק"בים היא שהוא מספק קידוד יעיל של המק"בים מ-s לכל הצמתים הנגישים מ-s.

כבר ב-BFS היינו צריכים קידוד כזה, כי שמירת המסלולים באופן מפורש עלולה לקחת $O(|V|^2)$ מקום. לעומת זאת, עץ המק"בים צורך $O(|V|)$ מקום.

כעת נראה לראשונה אלגוריתם אמיתי שמבוסס על עקרונות אלה: חישוב מק"בים ב-DAG (גרף מכוון אציקלי). האלגוריתם מופיע מחוברת.



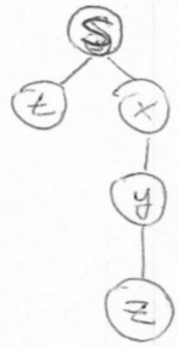
נתחיל במיון טופולוגי ($O(|V|+|E|)$), וכעת נוכל להתעלם מכל הצמתים הקודמים ל-s.

נאתחל את המשתנים.

נעבור על הצמתים לפי סדר המיון הטופולוגי, ומכל צומת נבצע RELAX על הקשתות שיוצאות ממנו.

נראה דוגמת ריצה על הגרף שמצויר למעלה.

	r	s	t	x	y	z
	∞	0	∞	∞	∞	∞
(s, t)	2					
(s, x)				6		
(t, x)				6		
(t, y)					6	
(t, z)						4
(x, y)					5	
(x, z)						4
(y, z)						3



נכונות: כאשר הלולאה המרכזית מגיעה לצומת u, מתקיים $d(u)=\delta(s,u)$.

הוכחה: באינדוקציה על סדר המיון הטופולוגי. עבור s זה נכון בגלל האתחול: $d(s)=0=\delta(s,s)$

נניח נכונות עד צומת u כלשהו ונבדוק את u,

אם u לא נגיש מ-s אז $d(u)=\infty$, כי הראינו $d(u) \geq \delta(s,u)$

נניח ש-u נגיש ע"י מק"ב

$$s \to u_1 \to u_2 \to \dots \to u_{k-1} \to u_k = u$$

לפי הנחת האינדוקציה, כשמגיעים ל-u_{k-1} מתקיים: $d(u_{k-1}) = \delta(s,u_{k-1})$.

כשמגיעים אליו מבצעים RELAX על כל שכניו, כולל u.

לאחר RELAX זה מתקיים: $d(u) \leq d(u_{k-1}) + w(u_{k-1},u)$

$$\Rightarrow d(u) \leq \delta(s,u_{k-1}) + w(u_{k-1},u) = \delta(s,u)$$

(כי תת-מסלול של מק"ב הוא מק"ב)

ומאחר שהוכחנו שתמיד $d(u) \geq \delta(s,u)$, מתקיים $d(u)=\delta(s,u)$

ולפני שנגיע לשני האלגוריתמים "חביבי הקהל", נציג עוד אלגוריתם:

האלגוריתם של Ford

(קלט: גרף כללי ללא מעגלים שליליים)

* אתחול
* לולאה: כל עוד קיימת קשת (u,v) עם RELAX משפר, נבצע אותו.

נשים לב שזהו לא אלגוריתם אמיתי, משום שהלולאה לא מוגדרת היטב. ובכל זאת, נגיד עליו משהו.

אם האלגוריתם עוצר, אזי בסיום מתקיים $d(u)=\delta(s,u)$.

הוכחה: נניח שלא, אזי קיימים בסיום צמתים v עבורם $d(v) > \delta(s,v)$.
ניקח מביניהם צומת v עם מספר מינימלי של קשתות במק"ב מ-s ל-v.

$s \to \dots \to u \to v$

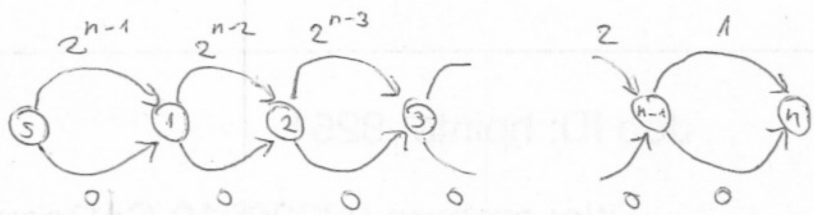
לפי בחירת v, u בהכרח צומת "לא מקולקל". לכן $d(u)=\delta(s,u)$

$$\Rightarrow d(v) > \delta(s,v) = \delta(s,u) + w(u,v)$$

$$\Rightarrow d(v) > d(u) + w(u,v)$$

ולכן עדיין קיים RELAX משפר על (u,v), בסתירה להנחה שהאלגוריתם "עוצר".

עם זאת, באופן כללי באלגוריתם Ford יכול להיות זמן ריצה איום ונורא.



(אם מישהו חש אי-נוחות בגלל השימוש בקשתות כפולות, הוא יכול להוסיף צומת באמצע כל קשת "עליונה"/"יקרה").

נראה סדר RELAX שיגרום למספר רב של צעדים. ($d(n)$ יתעדכן $\sim 2^n$ פעמים.

ישנם 2^n מסלולים אפשריים מ-s ל-n, ומשקלותיהם $0,1,2,\dots,2^n-1$
(אם נסמן בחירה של קשת עליונה ב-1, ושל קשת תחתונה ב-0, משקל כל מסלול יהיה הערך של סדרת הספרות שמתאימה לו בקידוד בינארי).
נתחיל עם המסלול שמסומל ע"י $111\dots1$, ובכל צעד נעשה RELAX שיקטין את משקל המסלול ב-1 בלבד.

או בצורה מדוייקת יותר: נעשה RELAX על הקשת העליונה $(s,1)$. ברקורסיה נריץ את האלגוריתם על הצמתים $1\dots n$; נעשה RELAX על הקשת התחתונה $(s,1)$ וברקורסיה נריץ את האלגוריתם על הצמתים $1\dots n$.

וכעת, האלגוריתם האמיתי שלו חיכינו!

אלגוריתם בלמן-פורד Bellman-Ford (מופיע בחוברת)

מעגלים שליליים, הראנו שתמיד קיים מק"ב פשוט. לכן במק"ב יש $|V|-1$
נשים לב, שאם נעשה RELAX על כל קשת פעם אחת, נסיים

לחשב את δ עבור כל ~~קשת~~ צומת במרחק 1 מ-s.
אם נעשה RELAX פעם נוספת על כל קשת, נסיים לחשב את δ עבור כל צומת במרחק 2 מ-s.
באופן דומה, אם נעבור על כל הקשתות $|V|-1$ פעמים, נשלים את חישוב δ עבור כל הצמתים הנגישים מ-s. זאת, ללא תלות בסדר שבו אנו עוברים על הקשתות בכל איטרציה.
זהו הרעיון של אלגוריתם בלמן-פורד, זמן הריצה שלו $\Theta(|V|\cdot|E|)$.

<u>נכונות</u>: בסיום $d(u)=\delta(s,u)$ לכל u.

<u>הוכחה</u>: מספיק להראות ל-u שנגיש מ-s. נסתכל במק"ב פשוט מ-s ל-u:

$$s\to u_1\to u_2\to\dots\to u_{k-1}\to u_k=u$$

נראה באינדוקציה על k, שאחרי k איטרציות $d(u)=\delta(s,u)$.
אם $k=0$, אזי $u=s$, ולכן בהתחלה (כלומר, אחרי 0 איטרציות)
$d(s)=0=\delta(s,s)$

נניח נכונות ל-$k-1$ ונבדוק עבור k: לפי הנחת האינדוקציה, אחרי $k-1$ איטרציות מתקיים $d(u_{k-1})=\delta(s,u_{k-1})$.
באיטרציה ה-k עוברים על כל הקשתות כולל (u_{k-1},u_k) ועושים RELAX, ואחריו מתקיים:

$$d(u_k)\le d(u_{k-1})+w(u_{k-1},u_k)=\delta(s,u_{k-1})+w(u_k,u_{k-1})=\delta(s,u_k)$$

לכן $d(u)\le\delta(s,u)$, ותמיד מתקיים האי-שוויון ההפוך, ולכן מתקיים שוויון.

ומאחר שכל צומת במרחק של עד $|V|-1$ מ-s, הטענה נכונה עבור כל צומת לאחר $|V|-1$ איטרציות.
כל זה, בהנחה שאין מעגלים שליליים. אם יש מעגל שלילי, האלגוריתם מגלה זאת בשורות 5-7, ומחזיר FALSE.
נראה כי גם חלק זה נכון: כבר הוכחנו שאם אין מעגל שלילי, אחרי שורה 4 מתקיים $d(u)=\delta(s,u)$ לכל u, ובפרט אין RELAX משפר ולכן יוחזר TRUE.

להפך, נניח שקיים מעגל שלילי שנגיש מ-s: $v_1\to v_2\to\dots\to v_k\to v_1$
קל לראות שלכל הצמתים במעגל יש $d(v_i)<\infty$ אחרי $|V|-1$ איטרציות.
נראה שעדיין קיים RELAX משפר: נניח שלא, ובפרט כל קשתות המעגל נבדקו ובאף אחת מהן לא היה RELAX משפר. לכן:

$$d(v_2) \le d(v_1) + w(v_1, v_2)$$

$$d(v_3) \le d(v_2) + w(v_2, v_3)$$

$$\vdots$$

$$d(v_1) \le d(v_k) + w(v_k, v_1)$$

נחבר את האי-שוויונים ונקבל:

$$0 \le w(v_1, v_2) + w(v_2, v_3) + \dots + w(v_k, v_1)$$