

6/1/08

אלגוריתמים - שיעור 10

האלגוריתם של דיניץ Dinic

למנהל רשת שכתובת מהרשת השנייה, ולחפש הרבה מסלולים משפחה
באותה רשת שכתובת כל עוד t נגיש מ- s . רק כש- t מפסיק להיות
נגיש, נבנה רשת שנייה חדשה.

לאחר מציאת מסלול משפר, נצרים דרכו צמיחה השווה לקיבול השנייה
המינימלי של המסלול, ונמחק את כל הקשתות הרלוונטיות. נפתח את
קיבול הקשתות האחרות של המסלול, ונמחק את הקשתות
ההפוכות לקשתות הרשת השנייה, כי ישנו בן יובל למסלול
באורך $< k$.

עכשיו נוכל עקרונות להרוץ שוב BFS על הרשת השנייה החדשה.
במקום זה נמצא את כל המסלולים המשפרים t ה"רצוי" DFS של
הרשת השנייה החדשה.

לורמאציה של DFS יש שני פרוצדורות:

ADVANCE, RETREAT, AUGMENT

ADVANCE(u): אם אין קשת יוצאת מ- u , לך ל-RETREAT(u).

אם יש קשת כזאת (u, v) , נלך ל- v ונמשיך ברוורסיה לבצע

ADVANCE(v), אלא אם כן $v=t$, ואז נבצע AUGMENT.

RETREAT(u): אם $u=s$ סוף הליפוף ברשת השנייה הנוכחית. נקרא

לזה סוף הפאזה הנוכחית.

אחרת, נמחק את u ואת כל הקשתות הנפגעות אלו, נקרא

לזה v שקרא ל- u , ונבצע ADVANCE(v).

AUGMENT: כמו מסלול משפר. נבחר צמיחה נוספת באורך המסלול,

נמחק קשתות רלוונטיות, נקטין קיבול של שאר הקשתות, ונמחור

לצומת ההתחלה u של הקשת הרלוונטית הכי קרובה ל- s במסלול,

ונבצע ADVANCE(u).

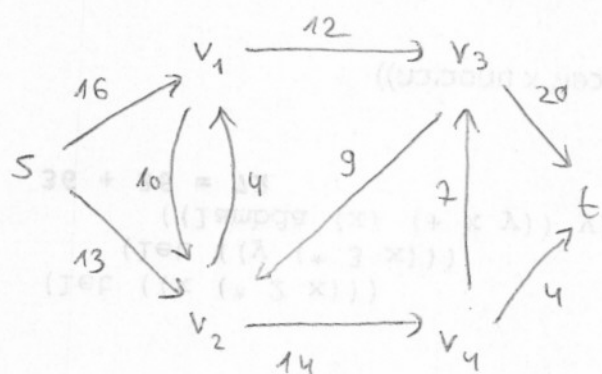
כל עוד קיים מסלול ברשת השנייה מ- s ל- t , האלגוריתם ימציא אותו, כל קשת
שנחתקה לא יגיע לשום מסלול משפר עתידי באורך k . לכן, כשנסיים את המסלול

מ- s ל- t ברשת הסכמית, אבל אין מסלול משפר באורך k ברשת השייחית, ואם צריך לעבור לפאזה חדשה.

בפאזה החדשה, קוצים נמצא את הצימנה f ברשת המקורית, s כל הצימנה הנוספת שצברה בפאזה.

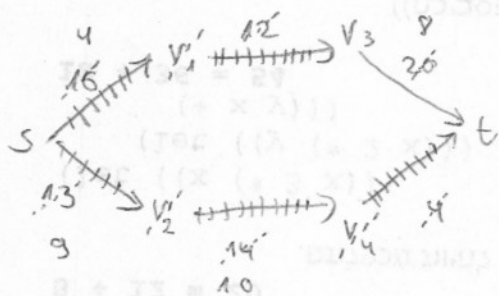
בונים רשת מ'רית חדשה G_s , בונים רשת שכמנה חדשה ומשתלבים ב-DFS.

נציג את האלגורית עם הדוגמה הקבועה של מחבלי התוקי:



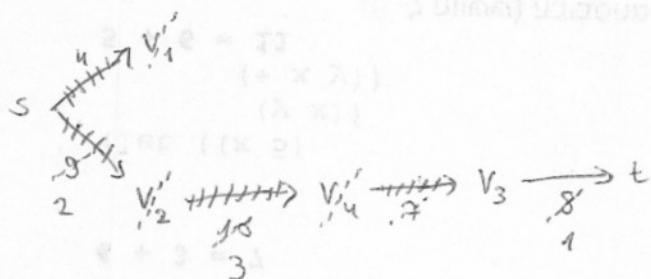
$$f \equiv G$$

$$G_s \equiv G$$



הצד הסכמית הראשון:
(מומלץ לסמלל את הריצה "סימולציה חיה")

בסוף הפאזה, אנחנו יכולים לעדכן את הצימנה, ולהציג 12 ב"מסלול העליון" ו-4 ב"מסלול התחתון". נפיק את הרשת השייחית המעודכנת:



שוב נצטרך את ברשתה, במקביל נציג 7 במסלול תוק שני בפאזה, שייחית את ריצת האלגורית.

נכונות: כל פאזה הושה הסכמית מכילה רק צמתים וקשתות שיכולים להוביץ על מסלולים משפרים באורך k ($k = \text{מס' הפאזה}$).

לסיכום, בסיום הפאזה, אין מסלולים משפרים ברשת השייחית, ולכן אין מסלולים משפרים מ- s ל- t באורך k ברשת השייחית.

בוכנו שהמרחק מ- s ל- t הוא חלש מאוד כל שיפור, ולכן בסיום פאזה, מרחק s ל- t ברשת השייחית הוא גדול מ- k .

לכן, ברור שהכמות $\leq$ מספר השכבות $\leq$ א. לכן, מספר הפאזות הוא לכל היותר $1 - \frac{1}{\epsilon}$, נותר לנו, אם כן, לתקן יציאות של פאזה אחת נקרא לקשה שמתקן "קשה חסומה".

כמה צעדים מבצע ה-DFS בין שתי מחיקות עוקבות? לכל היותר k (כי אחרי חסימה אנחנו חוזרים למקור הקשה שנחקרה, ועושים ADVANCE עד שתקדים, ובהכרח נתקן טוב k צעדים). אם החסימה בפאזה $\geq |E|$. נשים לב ש- $O(|V|)$ $=$ א, ולכן סיבוכיות פאזה היא $O(|V| \cdot |E|)$. הטורגורמס כולו רץ בסמן $O(|E| \cdot |V|^2)$ (לעומת $O(|E|^2 |V|)$ של אדמונדס-קארפ). כזאת לבעיה שיש אלגוריתמים טובים אלף יותר, בסמן הריבוע שלהם הוא $O(|V|^2)$ ואלף פחות (וינן, למשל אלגוריתם כפף בקורמן).

רשתות $0/1$

אלה רשתות - כמה מפתיע - שבהן קיבול כל קשה הוא 1 (או 0). האלגוריתם של דיניץ יחל מאונד על רשתות כאלה. פאזה אחת של דיניץ לקחה $O(|E|)$ זמן בלבד, ונסוה זאת בהמשך. בתחילת הדיוק $G = G_1$ וכל הקיבולים 1 . בעצם, לכל f במהלך האלגוריתם, כל הקיבולים ב- G_1 הם 1 , כי אחרי מסלול משפר, שדרכו צומת זרימה נוספת 1 , כל הקשתות עליו נהיות רוויות ולכן יוצאות מהרשת השיורית; וכל הקשתות ההפוכות נכנסות לרשת השיורית עם קיבול שיווי 1 . לכל קשה מקורית, או היא או הפוכתה שייך ל- G_1 עם קיבול 1 , ולכל קשה מקורית, בכל שלב, הזרימה היא 0 או 1 .

בשלבצעים AUGMENT מוחקים א קשתות, אלה ה-AUGMENT היא $(k, 0)$. בין AUGMENT אחד לפני מספר הצעדים פרופורציונלי ל- $(k + 1)$ מס' הקשתות שנחתקו ביאל צמחים תקועים)

אפשר לחיב את ה-AUGMENT ב-"א" שמוסע בעלה בין שני AUGMENT, ולכן בעלות הכוללת של פאזה היא בדיוק $O(|E|)$, לכן אלה דיניץ $O(|V||E|)$ על רשת $0/1$, אלא אפשר למצוא חסמים אסימפטוטיים טובים יותר לסמן הריבוע! אלה המוצאות החשובות בהקשר זה.

- ① ברור $0/1$ מס' הפאזות הוא $O(|E|^{1/2})$.
- ② ברור $0/1$ מ'פוס 1 (מוטף שרמ הפדורני) $O(|V|^{3/2})$ פאזות.
- ③ ברור $0/1$ מ'פוס 2 $O(|V|^{1/2})$ פאזות.

רשת מ"פוס 1 היא רשת שאין בה קשתות מקבילות (כלומר לא הגדרה "לבעת", כי כל רשת עם קיבולות שלמות אפשר ל"צב כרשת $\frac{1}{2}$ מסוג זה).
 רשת מ"פוס 2 היא רשת בה לכל צומת יש דרגת פניסה 1 או דרגת יציאה 1.
 הגדרה חשובה: ל"פוס הרשת נשמר גם בהפוך - השינוי.

עבור ל"פוס 1 זה ברור, נראה שיש ל"פוס 2 נשמר:
 לאתר כל שיפור, הצרימה נוספת של 1 במסלול מספר, כל הקשתות שלו יהיו רוויות ונמחקת מ- E וכל הקשתות ההפוכות נכנסות ל- E . אם המסלול המספר לא עבר דרך u אין שינוי. אם הוא עבר דרך u , בדיוק שתי קשתות התפכו:



כעת נראה שמספר הפאזות ברשת הכללית $O(|E|^{\frac{1}{2}})$ וברשת מ"פוס 2 הוא $O(|V|^{\frac{1}{2}})$.

לענין: נניח שהצרימה הנוכחית $\equiv s$, ונצטרף הצרימה המקסימלית M . אז מ"פוס הפאזות ברשת הפוכה:

$$k \leq \frac{v-2}{M} + 1 \quad \text{דרגת מ"פוס 2};$$

$$k \leq \frac{E}{M} \quad \text{דרגת כללית};$$

נסיגה: אם הצרימה המקסימלית F , ונמסל אל הקשתות הרוויות צרימה 1.



בן מהות מסלולים מ- s ל- t שונים בקשתות. אבל מצב כמו שמאל בשרטוט משמאל לא יתכן ברשת מ"פוס 2. ברשת מ"פוס 2 המסלולים שונים בצמיגים הפנימיים.

נסימן ב- λ את המסלול הקצר ביותר מבין אלה. מ"פוס המסלולים מסוג זה הוא בדיוק M , כי בכל מסלול צומת צרימה 1.

לרשת כללית = סה"כ המסלולים משמאלים באפיון $M \cdot \lambda \leq E$ קשתות (לפי הצרימה בקשתות). $\lambda \leq \frac{E}{M}$.

לרשת מ"פוס 2: המסלולים משמאלים אפיון ב- $M(\lambda-1)$ צמיגים פנימיים $M(\lambda-1) \leq |V|-2 \Rightarrow \lambda \leq \frac{v-2}{M} + 1$

אבל k , שהוא האורך המינימלי של מסלול כלשהו מ- s ל- t מקיים $k \leq \lambda$.

נרשם את צינור עם הפסגה שספקיותה ערך הצרימה הנכונה עוקר לראשונה
(או שזה לא) $M - |V|^{\frac{1}{2}}$ (אם $M =$ ערך הצרימה המקסימלי).

מרגע זה ואילך יש $|V|^{\frac{1}{2}} \geq$ פאזה, כי כ"א מעצירה את ערך הצרימה ב-1 לפחות.

נסימן ב-F את ערך הצרימה בתחילת הפסגה $F < M - |V|^{\frac{1}{2}}$

נניחם את הלענה עבור G_F כרש מקורית, כאשר כרש צרימה בריכה צרימה 0. המקסימום הנולד שנוכל להצרים הוא $M - F > |V|^{\frac{1}{2}}$.
לפי כלענה, אם הפסגה א פסגה הנכונה

(פה אנחנו משתמשים בהנחה 2!) $k \leq \frac{|V|-2}{M^*} + 1 \leq |V|^{\frac{1}{2}} + 1$

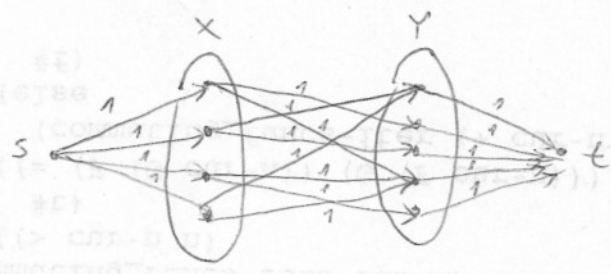
↑
צרימה מקסימלית ב- G_F
 $M^* = M - F > |V|^{\frac{1}{2}}$

כלומר, אם הפסגה עם לרש זה $|V|^{\frac{1}{2}} + 1 \geq$.
לכן, אם הפסגה לפני רש זה ואחר' רש זה, שמה אם הפסגה הנולד, הוא $O(|V|^{\frac{1}{2}})$.

אם לא נשתמש בהנחה זו, נוכל להחליף בכל מקום את $|V|$ ב- $|E|$, ואם באי-שוויון המרכזי נחליף באי-שוויון $k \leq \frac{|E|}{M^*} \leq |E|^{\frac{1}{2}}$, ובכן נקבל את הלענה עבור רש כללי.

ציון מקסימלי

סמל $V = X \cup Y$, $E \leq X \times Y$. יש למצוא אולי מקסימלי של קשתות ב-E שיהיו בצורתם, נראה דיוקציה של הבסיס להבנת צרימה:



(חשב צרימה מקסימלית, וקשתות E החיות מהווה ציון מקסימלי.
 $F =$ ערך הצרימה המקסימלי.

$M =$ גודל הציון המקסימלי.
 $M = F$, מהסיבה הפשוטה צרימה היא ציון כי דרך כל קשת חווה צרימה של 1 ובכל ציפוס 2 אין 2 קשתות באותו צורת ק-א או לאות צורת ק-ב.

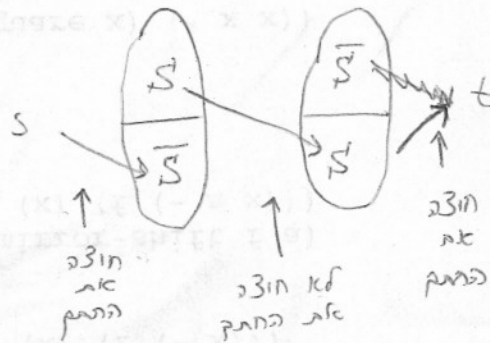
ממך הריבוי הוא כמובן $O(|E||V|)$

משפט Hall

יהי G גרף דו־צדדי קודם. נניח כי $|X|=|Y|$.
 לכל $A \subseteq X$ נסמן ב- $\Gamma(A)$ את קבוצת השכנים של A ב- Y (כלומר $\Gamma(A) \subseteq Y$).
 אז G יש לו זיווג מושלם אם ורק אם לכל $A \subseteq X$, $|\Gamma(A)| \geq |A|$.
 אם התנאי לא מתקיים, קל לראות שאין זיווג מושלם.

הכיוון ההפוך קצת יותר מורכב: נסמן ב- n את $|X|=|Y|$. נניח שיש
 הצרחה אבל נסרף את הקבוצות של כל קשת E ב- ∞ .
 (ניתן שלא קיים זיווג מושלם) $\leftarrow M \leq n$
 $M=F$ צירף צרחה מקסימלית.

נסתכל ב- G_f עבור הצרחה המקסימלית f . נסמן ב- S את כל הצמתים
 בדרגה הסתגרת האחרונה (ג'ישים S - n). $s \in S$, $t \notin S$.



$$M = C(S, V \setminus S)$$

$$n - |A| + |\Gamma(A)| < n$$

$$\Rightarrow |\Gamma(A)| < |A| \Rightarrow \text{סותר}$$