30/3/09

אלגברה ב' 2 - שיעור 8

משפט 4.4.7: נניח כי $F\subset K\subset L$. יהי α אלגברי מעל K, ונניח כי K הרחבה אלגברית של F. אזי α אלגברי מעל F.

דוגמה: מספר $z\in\mathbb{C}$ נקרא מספר אלגברי, אם הוא אלגברי מעל $\mathbb{Q}$. ממסקנה 4.4.5 נקבל כי אם $\bar{\mathbb{Q}}=\{z\in\mathbb{C}: \text{מספר אלג'}\ z\}$ הינה שדה.

נראה כי $\bar{\mathbb{Q}}$ סגור אלגברית. כלומר, כל פולינום $f(x)\in\bar{\mathbb{Q}}[x]$ הינו מתפצל מעל $\bar{\mathbb{Q}}$. באינדוקציה מספיק להוכיח כי לכל פולינום שאינו קבוע, קיים שורש ב-$\bar{\mathbb{Q}}$. כיוון ש-$\mathbb{Q}\subset\mathbb{C}$ אז $f(x)\in\mathbb{C}[x]$. מהמשפט היסודי של האלגברה, ל-$f(x)$ יש שורש α. שורש זה הוא אלגברי מעל $\bar{\mathbb{Q}}$ כי $f(x)\in\bar{\mathbb{Q}}[x]$.

ממשפט 4.4.7 נובע כי α הוא אלגברי מעל $\mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q}\subset\bar{\mathbb{Q}}\subset\bar{\mathbb{Q}}(\alpha)$). לכן ל-$f(x)$ יש שורש $\alpha\in\bar{\mathbb{Q}}$.

דוגמה: ממשפט 4.4.7 נובע כי כל פתרון של המשוואה

$$x^{11}-(\sqrt{2}+\sqrt{5})x^5+3\sqrt[4]{12}\,x^3+(1+3i)x+\sqrt[5]{17}$$

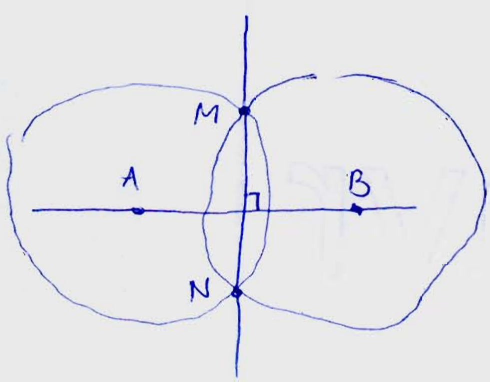
הוא מספר אלגברי. מתרגיל בית נובע כי דרגת הפולינום המינימלי של כל פתרון של המשוואה (מעל $\mathbb{Q}$) הינה לכל היותר 1760.

בניות באמצעות סרגל ומחוגה

(את נושא זה נלמד מפרק 7 אצל Stewart)

נתון סרגל לא מסומן ומחוגה. אילו בניות גיאומטריות ניתן לעשות באמצעות כלים אלו? נראה דוגמאות:

1) העלאת אנך לקו נתון: יהי AB קו ישר העובר דרך הנקודות A,B. M נקודה כלשהי לא על הישר. אנו רוצים לבנות אנך ל-AB דרך M: נבנה מעגל שמרכזו ב-A ורדיוסו AM, ומעגל שמרכזו ב-B ורדיוסו BM. תהא N נקודת החיתוך השניה של שני המעגלים. אזי NM הוא האנך המבוקש.

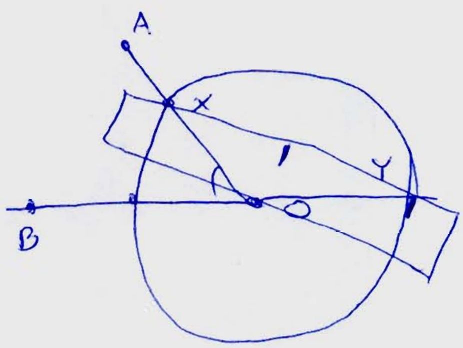


2) <u>העברת ישר מקביל</u>: נתון קו AB ונקודה M לא על הישר. אנו רוצים להעביר ישר מקביל ל- AB דרך M. נעביר מעגל שמרכזו ב-A ורדיוסו AM ונסמן את נקודות החיתוך שלו עם הישר בתור C, C'.
נעביר מעגל שמרכזו ב-C ורדיוסו AM. נעביר מעגל שמרכזו ב-M ורדיוסו AM. נסמן את החיתוך של המעגלים האחרונים ב-N. נחבר את M ואת N, וזהו הישר המבוקש.

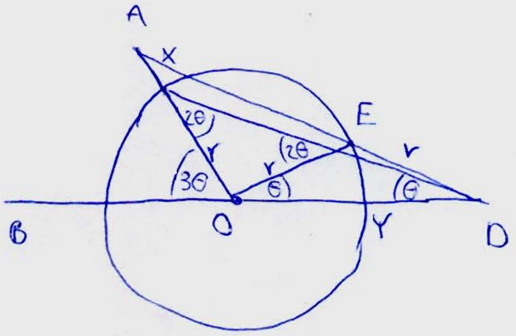
היוונים ידעו את הבניות לעיל, ובניות רבות ומתוחכמות נוספות. אך היו שלוש בעיות אותן הם לא הצליחו לפתור:

1) לבנות קוביה שנפחה כפול מנפח קוביה נתונה.
2) לחלק זווית נתונה ל-3 זוויות שוות.
3) לבנות ריבוע ששטחו שווה לשטח מעגל נתון.

חשוב לציין, שאם הסרגל מסומן (כלומר, מסומנות עליו שתי שנתות), ניתן לפתור את הבעיות. לדוגמה, נחלק זווית לשלושה חלקים שווים:



נקצה מעגל שרדיוסו r (זה המרחק בין השנתות) ומרכזו ב-O (מוצא הקרניים). נסמן את חיתוך המעגל עם הקרניים ב-X ו-Y.
נצמיד קצה מסומן אחד של הסרגל לישר OB ונחבר אותו עם הנקודה X. נחליק אותו כאשר קצה אחד נשאר על הישר BO והסרגל עובר דרך X. בשלב כלשהו הקצה המסומן האחר יהיה על המעגל. במצב זה:



(D, E הם הקצוות המסומנים של הסרגל)

<u>מסקנה</u>: עלינו להגדיר היטב את הבעיה:

נתונה קבוצת נקודות P_0 במשור. נגדיר על P_0 שתי פעולות:

R - העברת ישר בין שתי נקודות של P_0.

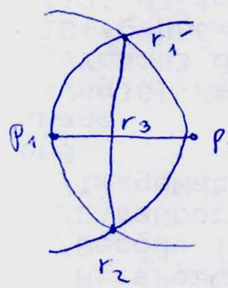
C - בניית מעגל שמרכזו נקודה שנמצאת ב-P_0 ורדיוסו שווה למרחק בין שתי נקודות שב-P_0.

<u>הגדרה 7.1</u>: כל נקודה המתקבלת כנקודת חיתוך בין שני ישרים, שני מעגלים או ישר ומעגל נקראת נקודה ניתנת לבנייה מ-P_0.

נקודה r במישור ניתנת להבנות מ- P_0 אם קיימת סדרת נקודות במישור $r_1, r_2, \dots, r_n = r$ כך שלכל $1 \le j \le n$ הנקודה r_j ניתנת לבנייה מהקבוצה $P_0 \cup \{r_1, \dots, r_{j-1}\}$

<ins>דוגמה:</ins> יהיו p_1, p_2 שתי נקודות במישור. אז נקודת האמצע של הקטע p_1p_2 היא נקודה ניתנת לבנייה.

כאן $P_0 = \{p_1, p_2\}$.



1) נחבר את p_1 ו- p_2 (R).
2) נבנה מעגל שמרכזו ב- p_1 ורדיוסו p_1p_2. (C)
3) נבנה מעגל שמרכזו ב- p_2 ורדיוסו p_1p_2 (C)
4) נסמן ב- r_1, r_2 את נקודות החיתוך של המעגלים.
5) נחבר את הנקודות r_1, r_2 בישר (R)
6) נסמן ב- r_3 את חיתוך הישרים p_1p_2 ו- r_1r_2.

נסמן ב- K_0 את תת-השדה של $\mathbb{R}$ הנוצר ע"י $\mathbb{Q}$ וע"י כל הקואורדינטות של נקודות P_0. כלומר אם $P_0 = \{(a_1, b_1), \dots, (a_m, b_m)\}$ אז:

$$K_0 = \mathbb{Q}(a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_m)$$

נניח ש- $r_1, \dots, r_n$ הן נקודות הניתנות להבנות מ- P_0. אם $r_j = (x_j, y_j)$ אז נגדיר את K_j בצורה אינדוקטיבית להיות השדה הנוצר ע"י K_{j-1} וע"י x_j, y_j. כלומר $K_j = K_{j-1}(x_j, y_j)$. בצורה זו בונים סדרה של הרחבות של שדות:

$$K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_n \subset \mathbb{R}$$

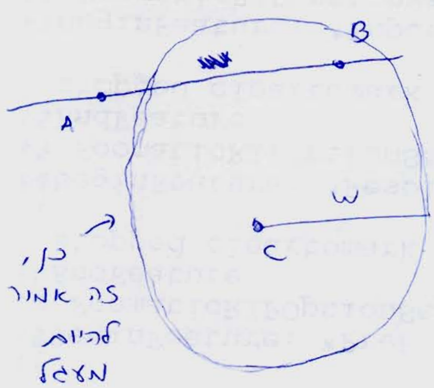
<ins>למה 7.3</ins>: בסימונים הנ"ל x_j ו- y_j הם איברים ב- K_j שהם אפסים של פולינומים <ins>ריבועיים</ins> עם מקדמים ב- K_{j-1}.

<ins>הוכחה:</ins> ישנם שלושה מקרים: חיתוך בין שני ישרים, חיתוך בין שני מעגלים, וחיתוך בין ישר למעגל. נראה את המקרה האחרון (השאר - תרגיל לקורא).

יהיו A, B, C שלוש נקודות שהקואורדינטות שלהן ב- K_{j-1}.

$A = (p, q)$ $B = (r, s)$ $C = (t, u)$

נסמן ב- w ~~את האורך~~ אורך כלשהו בין שתי נקודות ב- P_{j-1}. כיוון שהקואורדינטות אין שתי נקודות הן ב- K_{j-1} אזי $w^2 \in K_{j-1}$.



כן, זה אמור להיות מעגל

משוואת הישר AB היא:

$$\frac{x-p}{r-p} = \frac{y-q}{s-q}$$

משוואת המעגל היא:

$$(x-t)^2 + (y-u)^2 = w^2$$

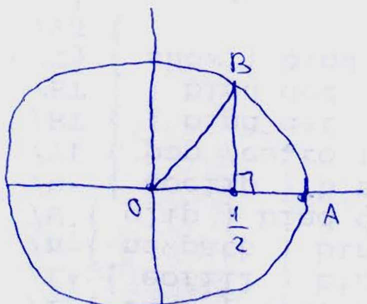
משתי משוואות אלו נקבל: $(x-t)^2+\left[\frac{s-q}{r-p}(x-p)+q-n\right]^2=w^2$

ולכן נקודות החיתוך פותרות משוואה ריבועית. ■

משפט 7.4: נניח כי $r=(x,y)$ ניתנת לבנייה מהקבוצה P_0. נסמן ב-K_0 את תת-השדה של $\mathbb{R}$ הנוצר ע"י $\mathbb{Q}$ ביחד עם הקואורדינטות של נקודות P_0. אז דרגת ההרחבות $[K_0(x):K_0]$ וגם $[K_0(y):K_0]$ היא חזקה של 2.

משפט 7.5 (Wantzel): אין אפשרות לחלק באופן כללי זווית לשלוש באמצעות סרגל ומחוגה.

הוכחה: נראה כי לא ניתן לחלק את $\frac{\pi}{3}$ ל-3 זוויות שוות.
ראשית נראה כי ניתן לבנות את הזווית $\frac{\pi}{3}$. כיוון ש- $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ הזווית $\measuredangle BOA$ היא $\frac{\pi}{3}$:



לחלק את $\frac{\pi}{3}$ ל-3 שקול לבניית המספר $\alpha=\cos\frac{\pi}{9}$. נסמן ב-β את המספר:

$$\beta=2\cos\frac{\pi}{9}$$

ידועה הזהות

$$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$$

נציב $\theta=\frac{\pi}{9}$, אז $\cos 3\theta=\frac{1}{2}$ ונקבל כי β מקיים את המשוואה $\beta^3-3\beta-1=0$. β הוא שורש של $f(t)=t^3-3t-1$.
$f(t)$ הוא אי-פריק מעל $\mathbb{Q}$, $[\mathbb{Q}(\beta):\mathbb{Q}]=3$. ממשפט 7.4 נובע כי דרגת ההרחבה היא חזקה של 2. קיבלנו סתירה. ■