

תרגיל: $\sqrt{2}$ אדגמנו מרחב - $\mathbb{Q}$ של x^2-2 פד $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a+b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$$

פד $a, b \in \mathbb{Q}$ כך ש:

$$\frac{1}{1-\sqrt{2}} = a+b\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow (a+b\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ a+2b=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=\frac{1}{3}$$

תרגיל: יהי a שורש של $q(x) = x^3+2x+2$ מרחב $\mathbb{Q}$

ו $q(x)$ אי-פריק מרחב $\mathbb{Q}$ - קריטריון קייס'ס מ $p=2$

$$\mathbb{Q}(a) = \{\alpha + \beta a + \gamma a^2 : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}\}$$

$$\text{פד, } \mathbb{Q}(a) = \mathbb{Q}[a]$$

$$\alpha + \beta a + \gamma a^2 \quad \text{כבר} \quad u = a^6 + 3a^4 + 2a^3 + 6a \quad \frac{1}{a^2+a+1}, \frac{1}{a} \quad \text{לחצ'ו את}$$

$$\frac{1}{a} = -\frac{1}{2}(a^2+2), \quad a(a^2+2) = -2 \quad \text{מהקשר} \quad a^3+2a+2=0 \quad \text{נקי}$$

$$\text{כדי לחשב את } \frac{1}{a^2+a+1} \quad \text{נחלק את } x^3+2x+2 \quad \text{ב-} x^2+x+1$$

$$(1) \quad x^3+2x+2 = (x^2+x+1)(x-1) + (2x+3)$$

$$(2) \quad x^2+x+1 = (2x+3)\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) + \frac{7}{4}$$

$$\frac{7}{4} = -\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)(x^3+2x+2) + (x^2+x+1) \cdot \frac{1}{4}(2x^2-3x+5)$$

כבר $x=a$

$$\frac{7}{4} = (a^2+a+1) \cdot \frac{1}{4}(2a^2-3a+5)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2+a+1} = \frac{1}{7}(2a^2-3a+5)$$

(מה ששינוי הוא למחשב אלקטרוני המורחב, למצא את הפולינום)
כפול מוצאנו

$$x^6+3x^4+2x^3+6x = (x^2+2x+2)(x^3+x) - 2x^2+4x$$

נחלק פולינומים

$$u = -2a^2+4a$$

כבר $x=a$

(3) למצוא פולינום מ'נ'מ'י עבור u

$$\mathbb{Q}(u) \subset \mathbb{Q}(a)$$

$$\underbrace{[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}]}_3 = \underbrace{[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}(u)]}_{\neq 1} \underbrace{[\mathbb{Q}(u) : \mathbb{Q}]}_1$$

פד הפולינום הוא ממעלה 3

כבר את $1, u, u^2, u^3$ כפולינום ב- $1, a, a^2$

$$1=1$$

$$u = 4a - 2a^2$$

$$u^2 = 32 + 24a + 8a^2$$

$$u^3 = 32 + 192 + 64a^2$$

$$\alpha + \beta u + \gamma u^2 = u^3$$

נחפש $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$ כך ש:

$$\begin{cases} \alpha + 32\gamma = 32 \\ 4\beta + 24\gamma = 192 \\ -2\beta + 8\gamma = 64 \end{cases}$$

המשוואה ~~השלישית~~ שנקבלת היא:

$$\alpha = -224, \beta = 0, \gamma = 8$$

סתיון:

$$\Rightarrow u^3 = 8u^2 - 224 \Rightarrow x^3 - 8x^2 + 224 = 0 \text{ של } u$$

תוצאה: להוכיח כי $\mathbb{Q}(\sqrt{i}) = \mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$. $\sqrt{i}$ הוא שורש של $f(x) = x^4 + 1$ שהוא

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{i}) : \mathbb{Q}] = 4 \text{ ולכן } \mathbb{Q} \text{ מכלול } \mathbb{Q}(\sqrt{i})$$

$$\mathbb{Q}(\sqrt{i}) \subseteq \mathbb{Q}(i, \sqrt{2}) \quad \sqrt{i} = \frac{\sqrt{2}}{2}(i+1) \text{ נמצא } \sqrt{i}$$

$$\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{i}) \text{ מכיוון } i = (\sqrt{i})^2 \text{ ולכן } i \in \mathbb{Q}(\sqrt{i}) \text{ מהשורה } i \in \mathbb{Q}(\sqrt{i}) \text{ נגזר ש-} \sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{i})$$

תוצאה: למצוא בסיס ומהות עבור $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$ מעל $\mathbb{Q}$.

$$\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\} \text{ בסיס } [\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = 4 \text{ וקבוצת אבסורס היא}$$

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{5}) : \mathbb{Q}] = 2 \text{ ונראה כי } K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$$

$$[K : \mathbb{Q}(\sqrt{2})] = 2 \text{ ולכן כל איבר ב-} K \text{ הינו מהצורה } x + y\sqrt{3} \text{ כאשר } x, y \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

$$\sqrt{5} \in K \text{ אם } \sqrt{5} = x + y\sqrt{3} \text{ כאשר } x, y \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \text{ ולכן}$$

$$5 = x^2 + 3y^2 + 2xy\sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3y^2 = 5 \\ 2xy = 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{5} = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \text{ אם } y=0 \text{ וזה לא ייתכן משקול צומת.}$$

$$\sqrt{5} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \text{ אם } x=0 \text{ וזה לא ייתכן. ולכן } \sqrt{5} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}) : \mathbb{Q}] = 8$$

$$\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{5}, \sqrt{10}, \sqrt{15}, \sqrt{30}\}$$

בסיס:

תוצאה: למצוא $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, \sqrt[5]{5}) : \mathbb{Q}]$ ולהראות כי $\sqrt[3]{5} + \sqrt[5]{5}$ אלמנטרי מעל $\mathbb{Q}$ ולמצוא

את צורתו.

$$x^3 - 5, x^5 - 5 \text{ אי-פריקים מעל } \mathbb{Q} \text{ ולכן גם } \sqrt[3]{5}, \sqrt[5]{5}$$

$$[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, \sqrt[5]{5}) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, \sqrt[5]{5}) : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})] \cdot [\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}) : \mathbb{Q}]$$

הם אלמנטריים.

$$\begin{matrix} m=3 \\ n=5 \end{matrix}$$

$$3 \mid [K : \mathbb{Q}] \text{ ולכן } [K : \mathbb{Q}] \leq 15 \text{ אם } K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, \sqrt[5]{5})$$

$$[K : \mathbb{Q}] = [K : \mathbb{Q}(\sqrt[5]{5})] [\mathbb{Q}(\sqrt[5]{5}) : \mathbb{Q}]$$

באופן צומת:

$$[K : \mathbb{Q}] = 15 \text{ ולכן } 5 \mid [K : \mathbb{Q}]$$

נחמה שהוכחנו שה'ע' $[Q(\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{5}) : Q] \mid 15$, $\text{ד"ר } 1, 3, 5$, 15
 נ"מ 1 $\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{5} \in Q$, $\sqrt[3]{5} \in Q(\sqrt[3]{5})$, $[Q(\sqrt[3]{5}) : Q] = [K : Q] = 1$
 $\begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix}$

15 סתירה, מאן 13 נחמה פוסל'ם נ"מ 3 ו"א 5 , 15

ד"ר המוצא ה'א 15