25/3/09

אלגברה ב' 2 - שיעור 8

<u>דוגמה:</u> נסמן $w = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, $L = \mathbb{Q}(w, \sqrt[3]{2})$. נחשב את $[L:\mathbb{Q}]$, נרשום:

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \subset \mathbb{Q}(w, \sqrt[3]{2}) = L$$

כיוון ש- (x^3-2) אי פריק מעל $\mathbb{Q}$ אז: $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}):\mathbb{Q}]=3$

w הוא שורש של x^2+x+1 שהוא פולינום אי-פריק. כיוון ש- $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \subseteq \mathbb{R}$

ו- w לא ממשי, אז $w \notin \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. לכן x^2+x+1 הינו הפולינום המינימלי

של w מעל $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. מכאן:

$$[L:\mathbb{Q}] = [L:\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})][\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}):\mathbb{Q}] = 2\cdot 3 = 6$$

<u>הרחבות אלגבריות</u>

<u>הגדרה 4.4.1:</u> הרחבה $F \subset L$ תקרא <u>הרחבה אלגברית</u>, אם כל איבר ב- L הינו אלגברי מעל F.

<u>למה 4.4.2:</u> תהי $F \subset L$ הרחבה סופית. אזי:

1) $F \subset L$ הרחבה אלגברית.

2) אם $\alpha \in L$ אז דרגת הפולינום המינימלי של α מעל F מחלקת את דרגת ההרחבה.

<u>הוכחה:</u> אם $\alpha \in L$ אז $F \subset F(\alpha) \subset L$. לכן ממשפט המגדל:

$$[L:F] = [L:F(\alpha)][F(\alpha):F]$$

כיוון ש- $[L:F] < \infty$ אז שני הסעיפים נובעים בעזרת מסקנה 4.3.4. ∎

<u>הערה:</u> ההפך אינו בהכרח נכון. ישנן הרחבות אלגבריות שאינן הרחבות סופיות.

<u>משפט 4.4.3:</u> תהי $F \subset L$ הרחבה. אז $[L:F] < \infty$ אם ורק אם קיימים $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in L$ כך שכל α_i הינו אלגברי מעל F, וגם:

$$L = F(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$$

<u>הוכחה:</u> נניח כי $[L:F] < \infty$. יהי $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ בסיס של המרחב הוקטורי L מעל F. אז:

$$L = \{a_1\alpha_1 + \dots + a_m\alpha_m : a_i \in F\} \subseteq F(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \subseteq L$$

לכן $L = F(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$. מלמה 4.4.2 נקבל שכל α_i הוא אלגברי.

בכיוון ההפוך, נניח כי $F(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = L$ וכל α_i הינו אלגברי. נסמן $L_0 = F$

ולכל $1 \le i \le m$, נסמן: $L_i = F(\alpha_1, \dots, \alpha_i)$

מכאן נקבל את סדרת ההרחבות

$$L_0 \subseteq L_1 \subseteq \dots \subseteq L_m = L \quad (1)$$

ממסקנה 4.1.11 נקבל שלכל $1 \le i \le m$:

$$L_i = F(\alpha_1, \dots, \alpha_i) = F(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1})(\alpha_i) = L_{i-1}(\alpha_i)$$

מכיוון שכל α_i אלגברי מעל F אז כל α_i אלגברי מעל L_{i-1} ($F \subset L_{i-1}$).

לכן ממסקנה 4.3.4 נקבל כי $[L_i : L_{i-1}] = [L_{i-1}(\alpha_i) : L_{i-1}] < \infty$

לכן בסדרת ההרחבות (1), כל הרחבה מדרגה סופית. לכן ממשפט המגדל:

$$[L:F] = [L_m : L_0] = [L_m : L_{m-1}] \cdot \ldots \cdot [L_1 : L_0] < \infty$$ ∎

מסקנה 4.4.4: תהי $F\subseteq L$ הרחבה, אם $\alpha,\beta\in L$ אלגבריים מעל F, אז $\alpha+\beta$, ו- $\alpha\cdot\beta$ אלגבריים מעל F.

הוכחה: ממשפט 4.4.3 ההרחבה $F\subseteq F(\alpha,\beta)$ הינה סופית. מלמה 4.4.2 נובע שזוהי הרחבה אלגברית. כיוון ש- $\alpha+\beta,\alpha\cdot\beta\in F(\alpha,\beta)$ התוצאה נובעת. ∎

מסקנה 4.4.5: תהי $F\subset L$ הרחבה: אזי $M=\{\alpha\in L:\ \alpha \text{ אלגברי מעל } F\}$ הינה תת-שדה של L.

הוכחה: $F\subset M$ כי אם $\alpha\in F$ אזי α שורש של $x-\alpha$, ולכן אלגברי. מסקנה 4.4.4 M סגור תחת חיבור וכפל. כמו כן, אם $0\neq\alpha\in M$ אז $\frac{1}{\alpha}\in M$ (ראינו בשיעור קודם). מכאן M שדה. ∎

משפט 4.4.7: נניח כי $F\subset K\subset L$. יהי $\alpha\in L$ אלגברי מעל K, ונניח כי K הינה הרחבה אלגברית של F. אז α אלגברי מעל F.

הוכחה: יהי α שורש של הפולינום $f(x)=\sum\beta_i x^i\in K[x]$. כל ה-$\beta_i$ הם אלגבריים מעל F - לפי הנחה. אז $M=F(\beta_1,\dots,\beta_n)$ הינה הרחבה סופית מעל F (משפט 4.4.3). ברור כי $f(x)\in M[x]$ ולכן α אלגברי מעל M. לכן ההרחבה $M\subset M(\alpha)$ הינה סופית. ממשפט 4.3.8 (המגדל):

$$[M(\alpha):F]=[M(\alpha):M][M:F]<\infty$$

לכן ההרחבה $F\subset M(\alpha)$ סופית, ולכן α אלגברי מעל F. ∎