

תיקון טעות בתרגיל:

תרגיל 6, שאלה 6: $\sqrt{-3}$ צ"ל $\sqrt{3}$
 $-\sqrt{2}$ צ"ל $\sqrt{2}$

תרגיל: מהו שדה הפיצול עבור $x^5 - 2$ מעל $\mathbb{Q}$?
 השורשים הם $\sqrt[5]{2} \zeta^j$ כאשר $0 \leq j \leq 4$. $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{5}}$. השדה מכיל את

$\sqrt[5]{2}$ ולכן את $\sqrt[5]{2} \zeta$ ולכן את ζ . לכן הוא $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}, \zeta)$.

$x^5 - 2$ הוא מינימלי עבור $\sqrt[5]{2}$. $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ הוא מינימלי עבור ζ .
 כיוון ש-4 ו-5 זרים נקבל $[\mathbb{Q}(\zeta, \sqrt[5]{2}) : \mathbb{Q}] = 20$

תרגיל: מהו שדה הפיצול עבור $x^4 - x^2 + 4$ מעל $\mathbb{Q}$?

נפתור ונקבל $x^2 = \frac{1 \pm i\sqrt{5}}{2}$. נרשום $x \pm u + iv$ ($u, v \in \mathbb{R}$) ונפתור:
 $(u+iv)^2 = \frac{1 \pm i\sqrt{5}}{2}$. הפתירה הם:

ולכן עבור x נקבל:

$$\pm \frac{\sqrt{5} \pm i\sqrt{3}}{2}$$

אזי שדה הפיצול הוא

$$\mathbb{Q}(\sqrt{5} + i\sqrt{3}, \sqrt{5} - i\sqrt{3})$$

תרגיל: לקיחה שדה פיצול עבור $x^3 + 2x + 1$ מעל $\mathbb{Z}_3$.
 פולינום זה הוא אי-פריק מעל $\mathbb{Z}_3$. אם נגזור $L = \mathbb{Z}_3[x]$.

יש $f(x)$ ש שורש ב- L , ונסמן $\alpha = x + \langle f \rangle$. לפי

$$x^3 + 2x + 1 = (x - \alpha)(x^2 + bx + c) \quad (b, c \in L)$$

$$-ac = 1 \Rightarrow c = -\frac{1}{a}$$

$$1 = -a^3 - 2a = -a(a^2 + 2) \Rightarrow c = a^2 + 2$$

נמצא את b, c ע"י השוואת מקדמים:
 אולי גם:

מהשוואת מקדמים נקבל גם $b = a$. קיבלנו:

$$x^3 + 2x + 1 = (x - a)(x^2 + ax + a^2 + 2)$$

נפתור את המשוואה הריבועית:
 $\frac{1}{2}(-a \pm \sqrt{a^2 - 4(a^2 + 2)}) = \frac{1}{2}(-a \pm \sqrt{1}) = \frac{1}{2}(-a \pm 1) = a \pm 1$

$$\Rightarrow x^3 + 2x + 1 = (x - a)(x - a - 1)(x - a + 1)$$

כלומר, L הוא שדה פיצול של $x^3 + 2x + 1$.

תרגיל 1: נניח כי $[K:L] = 2$. הוכח כי $L = K$ (הרחבה נורמלית).

(תרגיל 2) הרחבה אלגברית היא נורמלית אם ורק אם לכל $\alpha \in L$ הפולינום

המינימלי של α מעל K מתפצל ב- L

ניקח $t \in L$. אז $t, t^2, t^3, \dots$ הם מסדר n .
כלומר 0 , המקסימום $at^2 + bt + c = 0$

$$f(x) = cx^2 + bx + a \neq 0$$

נצטר:

$f(x) = 0$, ולכן הפולינום המינימלי של t מעל K מתלקט ב- L .
הוא מתפצל ב- L או $(x-t)(x-s)$. כיוון ש- t שייך ל- L אז
סביר $s \in L$, ולכן מתקבל ש ההרחבה נורמלית.

תרגיל 2: $2 \leq m$, שמים. מה ההרחבה $\mathbb{Q}(\sqrt[m]{m}) \subset \mathbb{Q}$ נורמלית?

$\mathbb{Q}(\sqrt[m]{m}) \subset \mathbb{R}$. פולינום $m - x^m$ ש לכל הישר בני ארבעה נגזרים.

אכן ההרחבה תהיה נורמלית אם ורק אם * הפולינום המינימלי של

$\sqrt[m]{m}$ מעל $\mathbb{Q}$ יהיו $x - \sqrt[m]{m}$ או $(x - \sqrt[m]{m})(x + \sqrt[m]{m})$. אם $x - \sqrt[m]{m}$

הוא המינימלי אז $\sqrt[m]{m} = r \in \mathbb{Q} \iff m = r^m \iff r = m^{1/m}$ אם.

במקרה השני $\sqrt[m]{m^2} = r \in \mathbb{Q}$ ולכן $m^2 = r^m \iff r = m^{2/m}$ אם המקסימום את המשוואה.