22/4/09

אלגברה ב' 2 - שיעור 11

S.2 הרחבות נורמליות

טענה: יהי L שדה פיצול של $f\in F[x]$. יהי $g\in F[x]$ פולינום אי-פריק. אם ל-g יש שורש ב-L אז כל שורשי g נמצאים ב-L.

הוכחה: נניח ש-f ו-g מתוקנים. אם $f=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)$, אז $L=F(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$. יהי $\beta\in L$ שורש של g. כיוון ש-$g(x)$ אי-פריק ומתוקן, אז הוא הפולינום המינימלי של β מעל F.
נניח כי $\beta=h(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ כאשר $h\in F[x_1,\dots,x_n]$.
נגדיר את הפולינום:

$$S(x)=\prod_{\sigma\in S_n}\left(x-h(\alpha_{\sigma(1)},\dots,\alpha_{\sigma(n)})\right)\in L[x]$$

(זה כנראה רעיון של לגרנז').
מהגדרה, $S(x)$ מתפצל ב-L. בפרט, אם $\sigma=e$ אז

$$x-h(\alpha_{\sigma(1)},\dots,\alpha_{\sigma(n)})=x-h(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=x-\beta$$

ולכן $S(\beta)=0$. אם נוכיח כי $S(x)\in F[x]$, אז מהנ"ל ינבע כי $g|S$, לכן כל שורשי g יהיו ב-L.
נגדיר

$$S'(x)=\prod_{\sigma\in S_n}\left(x-h(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)})\right)$$

אז נפתח סוגריים ונקבל:

$$S'(x)=\sum_{i=0}^{n!}p_i(x_1,\dots,x_n)x^i.$$

אז p_i הינו פולינום סימטרי וגם $p_i\in F[x_1,\dots,x_n]$.
אם נציב $x_i=\alpha_i$ נקבל:

$$S(x)=\sum_{i=0}^{n!}p(\alpha_1,\dots,\alpha_n)x^i$$

ממה שהסברנו בשיעור הקודם: $p_i(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in F$.
לכן $S(x)\in F[x]$. ∎

דוגמה S.2.2: מהטענה לעיל נובע כי $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ אינו שדה פיצול של אף פולינום מעל $\mathbb{Q}$. זאת מאחר שהוא מכיל שורש של x^3-2, אך לא את כל שורשיו (שניים מהם לא ממשיים).

הגדרה S.2.3: הרחבה אלגברית $F\subset L$ תיקרא נורמלית אם כל פולינום אי-פריק ב-$F[x]$ שיש לו שורש ב-L, מתפצל ב-L.

משפט S.2.4: נניח כי $F\subset L$. אז L הינו שדה פיצול של פולינום $f\in F[x]$ אם ורק אם ההרחבה $F\subset L$ נורמלית וסופית.

הוכחה: נניח כי L הינו שדה פיצול של פולינום f. אז ממשפט 5.1.5 (שאומר כי $[L:F] \leq n!$) נובע כי ההרחבה $F \subset L$ סופית.
מטענה 5.2.1 (שהוכחנו בתחילת השיעור) נובע כי ההרחבה נורמלית.
בכיוון ההפוך: מהנתון על סופיות ההרחבה נובע כי $L = F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$
כאשר כל ה-α_i-ים אלגבריים מעל F. (משפט 4.4.3).
יהי $p_i \in F[x]$ הפולינום המינימלי של α_i מעל F. נגדיר $f = p_1 p_2 \cdots p_n$
כיוון שההרחבה נורמלית, וכיוון של-p_i יש שורש ב-L, נובע מכך שכל
שורשי p_i הם ב-L. לכן p_i מתפצל ב-L, ומכאן ש-f מתפצל
ב-L.
נניח כי $L' \subset L$ הינו תת-השדה הנוצר ע"י F ושורשי f. אז הוא
מכיל את α_i, $1 \leq i \leq n$, לכן מכיל את L. כלומר $L = L'$.
כלומר, L הוא שדה הפיצול של f. ∎

5.3 הרחבות ספרביליות

יהי $f(x)$ פולינום ב-$F[x]$ ונניח כי הוא מתפצל בשדה L. אזי:
$$f(x) = (x - \beta_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (x - \beta_r)^{m_r} \cdot a_0$$
כאשר $a_0 \in F$, $\beta_i \in L$.
המספר m_i נקרא הכפליות של השורש β_i. אם $m_i = 1$ נאמר כי השורש β_i הוא
שורש פשוט. אחרת נאמר כי β_i הינו שורש מרובה.

הגדרה 5.3.1: הפולינום $f(x) \in F[x]$ נקרא ספרבילי אם הוא לא קבוע וכל
שורשיו בשדה הפיצול שלו הם פשוטים.
מיחידות שדה הפיצול עד כדי איזומורפיזם (או לחילופין מתרגיל בית שהיה ממש
מצמן) נובע כי ההגדרה נ טובה.
יהי $f \in F[x]$ ונניח כי $f = (x - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n)$ כאשר $n = \deg f > 1$. נגדיר
$$\Delta(f) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2$$
אם $\deg f = 1$ נגדיר $\Delta(f) = 1$.
Δ נקרא הדיסקרימיננטה של f.

טענה 5.3.2: יהי $f \in F[x]$ פולינום מתוקן שאינו קבוע. התנאים הבאים שקולים:
1) f הינו ספרבילי.
2) $\Delta(f) \neq 0$
3) f ו-f' זרים כפולינומים ב-$F[x]$, כלומר $\gcd(f, f') = 1$