

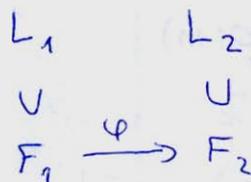
הצגנו: יהי $f \in F[x]$ פולינום מצרפה סגור, התחקה $F \subset L$ הינה שדה פיצול עבור f משל F אמו:

$f(x) = c(x-\alpha_1) \dots (x-\alpha_n)$ (1) $\alpha_i \in L$

$L = F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ (2)

נרצה להוכיח כי שדה פיצול הינו יחיד עד כדי איזומורפיזם. נסתח בצורה יותר כללית. נניח כי $\varphi: F_1 \rightarrow F_2$ הינו איזומורפיזם של שדה ויהי

$f_1 \in F_1[x]$ פולינום מצרפה סגור. אם נפעיל את φ על מקדמיו f_1 נקבל פולינום $\varphi(f_1) = f_2 \in F_2[x]$ מצרפה הינו F_2 . עבור $i=1, 2$ יהיו L_i שדה פיצול של f_i .



משפט 5.1.6: הסיומים הנ"ל, בהינתן $f_1 \in F_1[x]$ ואיזומורפיזם $\varphi: F_1 \rightarrow F_2$, קיים איזומורפיזם יחיד $\tilde{\varphi}: L_1 \rightarrow L_2$ כך שו $\tilde{\varphi}|_{F_1} = \varphi$.

הוכחה: באינדוקציה על $\deg f_1 = \deg f_2 = n$. אם $n=1$ אז משפט 5.1.5

(שאר כי $[L:F] \leq n!$) נובע $L_i = F_i$ עבור $i=1, 2$ וכן $\tilde{\varphi} = \varphi$.

מהצד, L_1 מכיל את כל שורשי f_1 שסמנם $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (נסמן $g_1 = \frac{f_1}{x-\alpha_1}$ וכן L_1 מכיל את שדה פיצול של g_1 משל $F_1(\alpha_1)$). ההרחבה $F_1 \subset F_1(\alpha_1) \subset L_1$.

383: נסמן $h_1 \in F_1[x]$ את הפולינום המינימלי של α_1 משל F_1 . כיון ש- $h_1(\alpha_1) = f_1(\alpha_1) = 0$ נובע כי $h_1 | f_1$ או h_1 הינו חלק אי-פריק של f_1 משל F_1 . לכן:

$F_1(\alpha_1) = F_1[\alpha_1] \cong \frac{F_1[x]}{\langle h_1 \rangle}$

איזומורפיזם זה שלח את α_1 לנקודה $x + \langle h_1 \rangle$.

383: נתאים ל- α_1 שורש של f_2 . האיזומורפיזם φ משרה איזומורפיזם

$\tilde{\varphi}: F_1[x] \rightarrow F_2[x]$, כך שו $\tilde{\varphi}(f_1) = f_2$. איזומורפיזם זה מעביר

פולינום אי-פריק לאי-פריק ולכן יצאנו את h_1 לחלק אי-פריק h_2 של f_2 . לכן h_2 מתפלג ב- L_2 כי f_2 מתפלג ב- L_2 .

יהיו $\beta_1, \dots, \beta_r \in L_2$ שורשי f_2 , ונסמנם כך ש- β_i הינו שורש של

F_2 פון β_1 ל h_2 הינו הפולינום הסימילי ל h_2 .

3.3 האם β_1 ניתן הרכבה ל F_2 על L_2 כן או לא. $F_2 \subset F_2(\beta_1) \subset L_2$

הני ענה פיצול עבור $g_2 = \frac{f_2}{x - \beta_1}$ פון $F_2(\beta_1)$ כן או לא.

$$F_2(\beta_1) = F_2[\beta_1] \simeq \frac{F_2[x]}{\langle h_2 \rangle}$$

איסורפסיה של β_1 ל $x + \langle h_2 \rangle$.

4.3 כיון שהאיסורפסיה $\psi: F_1[x] \rightarrow F_2[x]$ נמשך ל $h_2 - \delta$ הלא נמשך ל $\langle h_2 \rangle$ האזיאל $\langle h_1 \rangle$ האזיאל $\langle h_2 \rangle$ ל.

$$\frac{F_1[x]}{\langle h_1 \rangle} \simeq \frac{F_2[x]}{\langle h_2 \rangle}$$

ל $x + \langle h_2 \rangle - \delta$ $x + \langle h_1 \rangle$ הלא נמשך ל $\langle h_1 \rangle$ האזיאל $\langle h_2 \rangle$ האזיאל $\langle h_1 \rangle$ האזיאל $\langle h_2 \rangle$ ל.

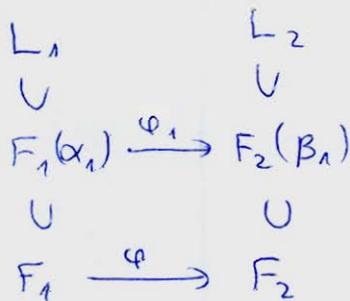
$$F_1(\alpha_1) \simeq \frac{F_1[x]}{\langle h_1 \rangle} \simeq \frac{F_2[x]}{\langle h_2 \rangle} \simeq F_2(\beta_1)$$

כיון איסורפסיה $\psi_1: F_1 \rightarrow F_2$ של $\psi_1(\alpha_1) = \beta_1$ ו $\psi_1|_{F_1} = \psi$.

~~$F_2(\beta_1) \simeq F_1(\alpha_1)$ ל ψ_1 האזיאל $\langle h_1 \rangle$ האזיאל $\langle h_2 \rangle$ ל.~~

5.3 כיון $\psi_1: F_1(\alpha_1) \rightarrow F_2(\beta_1)$ נמשך ל $\beta_2 - \delta$ α_1 הלא נמשך ל $F_2 - \delta$ F_1 ל.

$$g_2 = \frac{f_2}{x - \beta_1} - \delta \quad g_1 = \frac{f_1}{x - \alpha_1} \quad \text{ל ψ_1 האזיאל $\langle h_1 \rangle$ האזיאל $\langle h_2 \rangle$ ל.}$$



האזיאל $\langle h_2 \rangle$ האזיאל $\langle h_1 \rangle$ האזיאל $\langle h_2 \rangle$ ל. כיון ψ_1 נמשך ל $\beta_2 - \delta$ α_1 הלא נמשך ל $F_2 - \delta$ F_1 ל.

ל $\bar{\psi}: L_1 \rightarrow L_2$ האזיאל $\langle h_2 \rangle$ האזיאל $\langle h_1 \rangle$ האזיאל $\langle h_2 \rangle$ ל. $\psi_1: F_1(\alpha_1) \rightarrow F_2(\beta_1)$ נמשך ל $\beta_2 - \delta$ α_1 הלא נמשך ל $F_2 - \delta$ F_1 ל.

כ $\bar{\psi}|_{F_1} = \psi$ כיון $\psi = \psi_1|_{F_1}$ הלא ψ_1 האזיאל $\langle h_1 \rangle$ האזיאל $\langle h_2 \rangle$ ל.

$$\bar{\psi}|_{F_1} = \psi$$

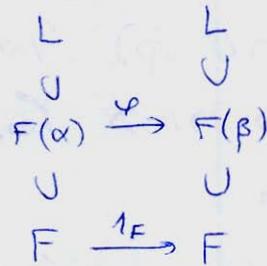
אם $f \in F[x]$ נשאר זה $f \in F[x]$ $1|_F: F \rightarrow F$ נקרא:

למקרה 5.1.7: אם L_1 ו- L_2 הם שדה הפיצול של פולינום $f \in F[x]$,
 אז קיים איזומורפיזם $L_1 \cong L_2$ כש F -הצטברות F היא 1_F .

למקרה 5.1.8: יהי L שדה הפיצול של פולינום כלשהו ב- $F[x]$. יהי h
 פולינום אי-פריק ושם F ונגיד כי α ו- β שני שורשים $\alpha, \beta \in L$.
 אז קיים איזומורפיזם $\sigma: L \rightarrow L$ כך ש- $\sigma(\alpha) = \beta$ ו- $\sigma|_F = 1_F$.

הוכחה: h יהיו הפולינום המינימלי של α ו- β שם F . לכן קיים איזומורפיזם
 $F(\alpha) = F[\alpha] \cong \frac{F[x]}{\langle h \rangle} \cong F[\beta] = F(\beta)$

איזומורפיזם אלו הם זהות על F , וממקום אחר α ו- β הם שורשי פולינום
 אותו $\varphi: F(\alpha) \rightarrow F(\beta)$ נגדיר $\varphi(\alpha) = \beta$. לכן ההכרחי $\varphi|_F = 1_F$.
 נגדיר φ על L יהיו שדה הפיצול של פולינום $f \in F[x]$.
 L אז $f \in F(\alpha)[x]$ ו- $f \in F(\beta)[x]$ אז L היא שדה הפיצול של f שם $F(\alpha)$ ו- $F(\beta)$.
 נגדיר φ על L בהתאמה.



כיון ש- $1_F = \varphi|_F$, אז φ ממקום אחר f לצברתו. נגדיר
 5.1.6 קיים איזומורפיזם $\bar{\varphi}: L \rightarrow L$ כך ש- $\bar{\varphi}|_{F(\alpha)} = \varphi$.
 $\sigma = \bar{\varphi}$ יהיו האיזומורפיזם המקוריים.

דוגמה 5.1.9: $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ הוא שדה הפיצול של הפולינום $x^2 - 2$ מעל \mathbb{Q} .

פולינום זה יהיו אי-פריק ושורשיו הם $\pm\sqrt{2}$. נגדיר 5.1.8
 קיים $\sigma: L \rightarrow L$ איזומורפיזם כך ש- $\sigma(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$ ו- $\sigma|_{\mathbb{Q}} = 1_{\mathbb{Q}}$ (ישו).

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$$

$$\sigma(a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}$$

הוא האיזומורפיזם המקוריים.

פונקציות סימטריות (סקירה מהירה של הנושא)

פולינום $f(x_1, \dots, x_n)$ נקרא סימטרי, אם לכל תמורה $\sigma \in S_n$ מתקיים:

$$f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, \dots, x_n)$$

לדוגמה, אם $n=3$ אז $x_1^r + x_2^r + x_3^r$ הינו סימטרי.

$$S_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \\ i_1 < \dots < i_k}} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}$$

כל $1 \leq k \leq n$, הפולינום

נקרא הפולינום הסימטרי האלמנטרי ה- k .

אם $n=3$ הפולינומים הסימטריים האלמנטריים הם:

$$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 \quad S_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 \quad S_3 = x_1 x_2 x_3$$

המשפט היסודי של הפונקציות הסימטריות קובע כי כל פונקציה (פולינומלית) סימטרית הינה פולינום במשתנים S_1, \dots, S_n .

לדוגמה:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) = S_1^2 - 2S_2$$

יהי $f(x) \in F[x]$ פולינום כלשהו ונגד כי שורשיו הם a_1, \dots, a_n (גרסא):

$$\begin{aligned} f(x) &= c(x-a_1) \dots (x-a_n) = c[x^n - (a_1 + \dots + a_n)x^{n-1} + (a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots) x^{n-2} + \dots \\ &+ (-1)^n a_1 a_2 \dots a_n] = c[x^n - S_1(a_1, \dots, a_n)x^{n-1} + S_2(a_1, \dots, a_n)x^{n-2} + \dots \\ &+ (-1)^n S_n(a_1, \dots, a_n)] \end{aligned}$$

כאשר מקבלי f הינם הפולינומים הסימטריים האלמנטריים מחושבים בנקודה

(a_1, \dots, a_n) . לפי אכן אם $f \in F[x]$ ואם $a_1, \dots, a_n \in L$ הם כל שורשי $f(x)$

$$S_k(a_1, \dots, a_n) \in F, \quad k$$

אכן מהמשפט היסודי של הפולינומים הסימטריים קובע כי $p(a_1, \dots, a_n) \in F$ לכל פולינום סימטרי p מעל F .

5.2 הרחבות גורמטור

אם L שדה הינו שדה פיצול של פולינום כלשהו.

5.2.1 יהי L שדה הפיצול של $f \in F[x]$. יהי $g \in F[x]$ אי-פריק. אם

L שדה L כל שורשי g נמצאים ב- L .

5.2.2 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ אינו שדה פיצול עבור פולינום כלשהו. כי אם ניקח

את הפולינום $x^3 - 2$, שבו פולינום אי-פריק מעל \mathbb{Q} . $\sqrt[3]{2}$ הוא

שורש, אך שני האחרים אינם ממשיים ולכן אינם ב- $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.