1/4/09

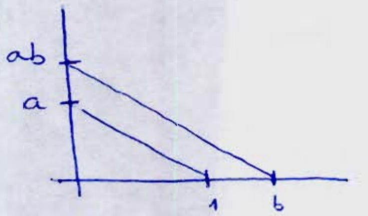
אלגברה ב' 2 - תרגול 5

בניות בסרגל ומחוגה

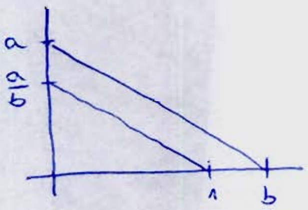
נניח כי המספרים a,b ניתנים לבנייה. אז גם ניתן לבנות את
$a+b, -a, ab, \frac{1}{a}, \sqrt{a}$

נראה את בניית ab: אם $b>1$, אז:

(אם $b<1$, הבנייה זהה)



בניית $\frac{a}{b}$:



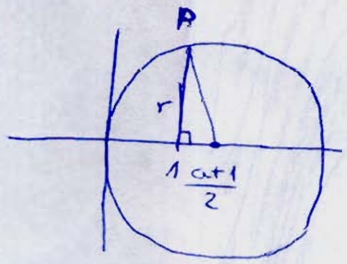
משפט: קבוצת המספרים הממשיים הניתנים לבנייה ע"י סרגל ומחוגה מכילה את קבוצת הממשיים הרציונליים.

בניית $\sqrt{a}$: נניח כי $a>1$, אזי $\frac{a+1}{2}>1$

נבנה מעגל שמרכזו ב- $\frac{a+1}{2}$, וזהו גם הרדיוס;

נעלה אנך מ-1, ונסמן את חיתוכו עם המעגל ב- P.

נסמן ב- r את המרחק בין 1 ל- P.



$$r^2+\left(\frac{a+1}{2}-1\right)^2=\left(\frac{a+1}{2}\right)^2$$

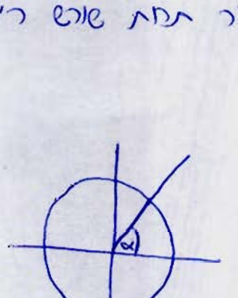
$\Leftarrow r^2=a$.

אם $0<a<1$ אז נבנה את $\sqrt{\frac{1}{a}}$ ואח"כ את ההופכי.

<u>מסקנה:</u> שדה המספרים הממשיים הניתנים לבנייה מכיל את Q וסגור תחת שורש ריבועי.

<u>תרגיל:</u> להוכיח כי ניתן לחלק את 72° לשלושה חלקים שווים.

צ"ל כי $\cos 24^\circ=\cos\frac{2\pi}{15}$



$\alpha=72^\circ$

מתק"מ הזהות האלגברית:

$$\cos 15y=16384\cos^{15}y-61440\cos^{13}y+92160\cos^{11}y-70400\cos^{9}y+28800\cos^{7}y-6048\cos^{5}y+5600\cos^{3}y-15\cos y$$

נציב $y=\frac{2\pi}{15}$ ונשתמש בכך ש: $1=\cos 2\pi$. לכן:

$\cos\frac{2\pi}{15}$ הינו שורש של הפולינום הזה שכתוב שם למעלה (דוד העתיק אותו שוב). הפולינום הזה מתפרק:

$$(x-1)(2x+1)^2(4x^2+2x-1)^2(16x^4-8x^3-16x^2+8x+1)^2$$

לכן $\cos\frac{2\pi}{15}$ הוא שורש של אחד הגורמים, ולא קשה (ע"י אלימינציה) שהוא שורש של $f(x)=16x^4-8x^3-16x^2+8x+1$.

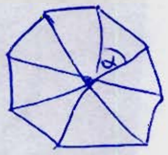
מעל $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ ניתן לכתוב: $f(x)=\frac{1}{4}\left(8x^2-(2-2\sqrt{5})x-3-\sqrt{5}\right)\left(8x^2-(2+2\sqrt{5})x-3+\sqrt{5}\right)$

מכאן ש- $\cos\frac{2\pi}{15}$ הוא שורש של אחד משני אלה. פתרון של המשוואות הריבועיות יתן לנו:

$$\cos\frac{2\pi}{15}=\frac{1}{8}\left(1+\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}\right)$$

ומאחר שבביטוי באגף ימין יש רק פעולות-שדה והוצאת שורש, מספר זה ניתן לבנייה.

מצולעים משוכללים



לבנית את המצולע המשוכלל משמאל שקול לבניית הזווית α, ששקולה לבניית המספר $\cos\alpha$. אם n הוא מספר הצלעות, $\alpha=\frac{2\pi}{n}$. למשל, התרגיל הקודם מוכיח שניתן לבנות מצולע משוכלל בעל 15 צלעות.
עבור אילו ערכי n זה אפשרי?

המספרים מהצורה $F_m=2^{2^m}+1$ נקראים מספרי פרמה.

$F_0=3 \quad F_1=5 \quad F_2=17 \quad F_3=257 \quad F_4=65537$

חמשת המספרים האלה ראשוניים. פרמה שיער שכל מספרי פרמה ראשוניים, אך אוילר הוכיח כי F_5 מתחלק ב- 641.

<u>השערה</u>: החל מ- $m=5$ אין יותר ראשוניים.

<u>משפט גאוס</u>: יהי $n>2$ שלם. ניתן לבנות באמצעות סרגל ומחוגה מצולע משוכלל עם n צלעות אם ורק אם $n=2^s\cdot p_1\cdots p_r$
כאשר $s\geq 0$ ואילו $p_1,\dots,p_r$ הם מספרים ראשוניים <u>שונים</u> שהם מספרי פרמה.

את הבנייה של המצולע המשוכלל בן 17 צלעות, גילה גאוס בגיל <u>18</u> (ואומרים שזו היתה התוצאה שהיה הכי גאה בה כל חייו):

$$\cos\frac{2\pi}{17}=-\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\sqrt{17}+\frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\frac{1}{8}\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}$$