

הרחבה נורמלית וספרביליות

(פרק זה ילמד מפרק 5 של קוקס)

5.1: שדה פיצול

בהינתן פולינום $f(x) \in F[x]$ אם משפט קריינקר מראה קיום של הרחבה של F שבה $f(x)$ מתפצל - כלומר מכליל את כל שורשי F .

הגדרה 5.1.1: יהי $f(x) \in F[x]$ פולינום שדרגתו $\leq n$. הרחבה $F \subset L$ הנ'ה שדה פיצול של f משל F אם:

- (1) $f(x) = c(x-\alpha_1) \cdots (x-\alpha_n)$
- (2) $L = F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

$c \in F, \alpha_i \in L$

בהינתן אחרת כמו שדה הקטן ביותר המכיל את α_i ו- F .

יש יותר משדה פיצול אחד. לדוגמה אם $f(x) = x^2 - 2$ אז:

הוא שדה פיצול. אלה הם: $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ו- $\mathbb{Q}(-\sqrt{2})$.
 הן שדה פיצול עבור $f(x)$.

דוגמה 5.1.2: $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ הן שדה פיצול עבור $(x^2-2)(x^2-3)$.

דוגמה 5.1.3: בדוגמה 4.10 ראינו כי $\mathbb{Q}(\pm\sqrt{2}, \pm i\sqrt{2}) = \mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$

אם $\mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$ הן שדה פיצול עבור $x^4 - 2$.

הערה: שדה פיצול של $f(x)$ תלוי ב- f ואם בשדה F . אם $f(x) = x^2 + 1$ אז:

$\mathbb{Q}(i)$ שדה פיצול של f משל $\mathbb{Q}$,

$\mathbb{C}$ משל $\mathbb{R}$,

$\mathbb{C}$ משל $\mathbb{C}$.

הערה: כיוון של שורשי $f(x) \in F[x]$ הינם איברים אלגבריים משל F , נוסע

משפט 4.4.3 כי שדה פיצול של f משל F הן ממ"ד הרחבה סופית.

משפט 5.1.5: יהי $f \in F[x]$ פולינום מדרגה $\leq n$. יהי L שדה פיצול של f משל F . אז $[L:F] \leq n!$.

הוכחה: באינדוקציה על n . אם $n=1$ אז $f(x) = ax+b$ $\Leftrightarrow x = \frac{-b}{a} \in F$. לכן $L=F$

ובמקרה זה $[L:F] \leq 1!$. יהי n כלשהו, ויהי $L = F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ שדה

פיצול עבור f משל F . נכתוב $f(x) = (x-\alpha_1)g(x)$, ומצא-זרמי החלקה נקבל כי $g(x) \in F(\alpha_1)[x]$.

כיוון ששורשי $g(x)$ הינם $\alpha_2, \dots, \alpha_n$, אז שדה פיצול של g משל $F(\alpha_1)$

$F(\alpha_1)(\alpha_2, \dots, \alpha_n) = F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = L$

הן

מכיון שדרגת $g(x)$ היא $n-1$, נקבל מהנחת האינדוקציה: $[L:F(\alpha_1)] \leq (n-1)!$.
 (פעם אחר מפעם המגדע על ההרחבה $F \subset F(\alpha_1) \subset L$, ונקבל:)

$$[L:F] = [L:F(\alpha_1)][F(\alpha_1):F] \leq (n-1)! [F(\alpha_1):F]$$

מסעי 4,3,4, $[F(\alpha_1):F]$ שזה דרגת הפולינום המינימלי של α_1 מעל F .
 הפולינום המינימלי של α_1 מעל F מחלק את פולינום Φ של α_1 שזה שורש שלו.
 לכן $[F:F(\alpha_1)] \geq n$.

הצורה: אי אפשר לשפר חסם זה. ניקח $\mathbb{Q}(w, \sqrt[3]{2})$ כאשר $w = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. שזה
 פיצול של $x^3 - 2$. בדיוק 4,3,4 ראינו כי: $[\mathbb{Q}(w, \sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 6 = 3!$
 כמו כן, $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ הוא שדה פיצול של $(x^2-2)(x^2-3)$, ומתקיים:

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = 4 < 4!$$

כדי להוכיח את יחידות שדה הפיצול עבור כפי איזומורפיזם, נוכיח משטח
 כללי יותר. נניח כי $F_1 \rightarrow F_2$ הינו איזומורפיזם של שדות. יהי $f_1(x) \in F_1[x]$
 פולינום שדרגתו $\leq n$. ע"י הפעלה φ על מקדמי f_1 נקבל פולינום
 $\varphi(f_1) = f_2(x) \in F_2[x]$ שדרגתו אף היא $\leq n$.
 נניח כי L_1, L_2 הינם שדות פיצול עבור f_1, f_2 בהתאמה.
 מתקיים:

$$\begin{array}{ccc} L_1 & & L_2 \\ \cup & & \cup \\ F_1 & \xrightarrow{\varphi} & F_2 \end{array}$$

משפט 5.1.6: בהינתן $f_1 \in F_1[x]$ ואיזומורפיזם $\varphi: F_1 \rightarrow F_2$, קיים
 איזומורפיזם $\bar{\varphi}: L_1 \rightarrow L_2$ כך ש: $\bar{\varphi}|_{F_1} = \varphi$.

(אם דאגה, נוכיח את המשפט הזה בשיעור הבא)

הסקנה 5.1.7: אם L_1 ו- L_2 הם שדות פיצול של פולינום $f \in F[x]$, אז
 קיים איזומורפיזם $L_1 \cong L_2$ כך שצמצומו ל- F הוא 1_F .

לענין 5.1.8: יהי L שדה פיצול של פולינום כלשהו ב- $F[x]$. יהי h
 פולינום אי-פריק מעל F , ונניח כי יש לו שני שורשים $\alpha, \beta \in L$.
 אז קיים איזומורפיזם $L \rightarrow L$ כך ש: $\sigma(\alpha) = \beta$ ו- $\sigma|_F = 1_F$.

דוגמה 5.1.9: $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ הוא שדה פיצול של $x^2 - 2$ מעל $\mathbb{Q}$.
 פולינום זה הינו פריק ושורשיו הם $\pm \sqrt{2}$.
 נגדיר $\sigma(\alpha + \beta\sqrt{2}) = \alpha - \beta\sqrt{2}$, וזהו האיזומורפיזם המקומי.