תרגיל: G חבורה סופית, p הראשוני הקטן ביותר שמחלק את $|G|$.
תהי $H \le G$, כך ש- $(G:H)=p$, אז $H \triangleleft G$.

(אם $p=2$, אז זה ידוע)

פתרון: G פועלת ע"י כפל משמאל על $X=\{gH : g\in G\}$, ע"י $g' * gH = g'gH$
זה נותן הומומורפיזם $\Psi: G \to S(X)$ ע"י $\Psi(g')(gH) = g'gH$

יהי $K=\ker(\Psi)$. אז $K \triangleleft G$. נראה ש- $K=H$.
אכן, $K \subseteq H$, כי אם $g'\in K$, אזי $\Psi(g')=1$, לכן $gH=g'gH$ לכל $g\in G$,
ולכן בפרט $H=g'H$ ולכן $g'\in H$.
$G/K \cong \Psi(G) \le S(X)$, לכן $|\Psi(G)|$ מחלק את $|S(X)|$, אבל $|S(X)|=|S_p|=p!$
ומצד שני $|\Psi(G)|=|G/K|=\frac{|G|}{|K|}$ מחלק את $|G|$.
ב- $p!$ מופיעים רק גורמים ראשוניים $\le p$.
ב- $|G|$ מופיעים רק גורמים ראשוניים $\ge p$.
לכן $|\Psi(G)|$, שמחלק את שניהם, לא מתחלק בגורמים ראשוניים פרט ל- p,
ומאחר שהוא מחלק את $p!$, בהכרח $|\Psi(G)|=p$. מתקיים $|\Psi(G)|=(G:K)$
מכאן $(G:K)=p \Rightarrow (G:H)=(G:K)$.
לפי הכלה ושוויון סדרים, $K=H$. □

הערה: זה תרגיל קשה. לא להיבהל.

משפט: תהי G חבורה, $H\le G$, $(G:H)=n$, אז יש $K \triangleleft G$ כך ש- $K \le H$
ו- G/K איזומורפית לתת-חבורה של S_n. בפרט $(G:K)<\infty$.

(זוהי מסקנה מפתרון השאלה הקודמת, וזה לפעמים שימושי.)

תרגיל (מין השלמה למשפט האיזומורפיזם השלישי): $K \le H \le G$, $K \triangleleft G$ (לא בהכרח סופית). צ"ל: $(G:H)=(G/K:H/K)$.

פתרון: יהי $\pi: G \to G/K$ האפימורפיזם הטבעי. נסמן $\bar{G}=G/K$, $\bar{H}=H/K=\pi(H)$.
צ"ל $|\{gH : g\in G\}| = |\{\bar{g}\bar{H} : \bar{g}\in \bar{G}\}|$
נגדיר העתקה $\varphi: \{gH:g\in G\} \to \{\bar{g}\bar{H} : \bar{g}\in\bar{G}\}$ ע"י $\varphi(gH)=\pi(g)\bar{H}$
φ מוגדרת היטב וחח"ע: $g_1H=g_2H \Leftrightarrow g_2^{-1}g_1\in H$
$\bar{g}_1\bar{H}=\bar{g}_2\bar{H} \Leftrightarrow \bar{g}_2^{-1}\bar{g}_1\bar{H} \Leftrightarrow \overline{g_2^{-1}g_1}\in\bar{H}$
$g_2^{-1}g_1\in H \Leftrightarrow \overline{g_2^{-1}g_1}\in\bar{H}$ כי אם $\bar{g}\in\bar{H}$ אז $g\in\pi^{-1}(\bar{H})=H$
φ על, כי כל $\bar{g}\in\bar{G}$ הוא תמונה ע"י π של איזשהו $g\in G$. □
("צ"ל שזה ברור, לא אומר שזה ברור למי שקורא את זה")

<u>תרגיל</u>: אם $L\le H\le G$ אזי $(G:L)=(G:H)(H:L)$ (נניח $(G:L)<\infty$).

<u>פתרון</u>: לפי המשפט שבסופו קודם, יש $K\lhd G$ כך ש- $K\le L$, ו- G/K סופית.
לפי התרגיל הקודם:

$$(G:L)=(\bar G:\bar L),\ (H:L)=(\bar H:\bar L),\ (G:H)=(\bar G:\bar H)$$

באשר $\bar M=M/K$ לכל $K\le M\le G$.
לכן די להוכיח את הנוסחה "עם הגגות", כלומר, בה"כ G סופית.
ואז מה שיש להוכיח נובע ממשפט לגרנז',
(כי $(G:H)=\frac{|G|}{|H|}$ וכו').

התרגיל הבא ניתן פעם במבחן. 6 תלמידים ניסו לפתור אותו. 4 טעו.

<u>תרגיל</u>: תהיינה A,B,C חילופיות. נניח $A\oplus B\cong A\oplus C$. הוכח $B\cong C$.

<u>הערה</u>: הטענה במשפט היא שקר. ראינו בתרגול דוגמה נגדית.

<u>תיקון</u>: A,B,C נוצרות סופית.

<u>פתרון</u> (שגוי): $(A\oplus B)/A\cong B$

$(A\oplus C)/A\cong C$

לכן מתוך $A\oplus B\cong A\oplus C$ נובע $B\cong C$.

<u>הטעות</u>: אילו היה קיים איזומורפיזם $\theta: A\oplus B\to A\oplus C$ <u>ששומר על A</u> $(\theta(A)=A)$
אזי ההרכבה

$$A\oplus B\xrightarrow{\theta} A\oplus C\xrightarrow{\pi_C} C$$

היא אפימורפיזם, גרעינו A, ולכן לפי משפט האיזומורפיזם ה-I הוא
משרה איזומורפיזם $\cancel{B\cong(A\oplus B)/(A\oplus A)}$ $B\cong A\oplus B/A\xrightarrow{\sim} C$
אך לא נתון שקיים איזו' כזה, (כלומר ששומר את A).

<u>הוכחה</u> (אמיתית): נניח ש- $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ מופיע a פעמים בפירוק של A כסכום-ישר-של-חבורות-מעגליות-מסדר-חזקה-של-ראשוני-או-אינסוף (למה אין שם לפירוק הזה?). הוא גם מופיע b פעמים בפירוק של B, c פעמים בפירוק של C $(a,b,c\ge 0)$.
אזי בפירוק של $A\oplus B$ הוא מופיע $a+b$ פעמים, ובפירוק של $A\oplus C$ הוא מופיע $a+c$ פעמים.
אבל ל- $A\oplus B\cong A\oplus C$ פירוק יחיד, ולכן $a+b=a+c \Rightarrow b=c$.
אותה טענה נכונה גם ל- $\mathbb{Z}$ במקום $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$.
לכן ל- B,C יש אותה הצגה, כלומר הן איזומורפיות לאותה החבורה.
לכן $B\cong C$.

(תכל'ס, לא נורא קשה. נכון? רק צריך <u>לשים לב</u> לכך שהחבורות נוצרות סופית)

<u>תרגיל:</u> G_1, G_2 פשוטות סופיות, לא חילופיות. $G=G_1\times G_2$, $N\triangleleft G_1\times G_2$

הוכח: $N=\{1\}$, $N=G$, $N=G_1$ או $N=G_2$.

<u>הערה:</u> אם G_1,G_2 חילופיות, זה לא נכון.

דוגמה נגדית: נניח $G_1=\langle a\rangle$, $G_2=\langle b\rangle$ מסדר 2. $G=\langle a\rangle\times\langle b\rangle$ חבורת קליין, שהיא חילופית. ייתכן ש- $N=\langle ab\rangle$, שהיא מסדר 2.

<u>הערה:</u> "זה תרגיל קצת מורכב. לא הייתי נותן אותו במבחן. אבל אפשר לתת. <u>חלק</u> מהבעיה, וזה כבר קרה בעבר".

<u>הוכחה:</u> נניח $N\neq\{1\},G_1,G_2,G$. תהי $\pi_1: G\to G_1$ ההטלה על הקואורדינטה הראשונה, כלומר $(g_1,g_2)\xrightarrow{\pi} g_1$. זהו אפימורפיזם, גרעינו $\ker\pi_1=G_2$.

נסמן $\varphi_1=\pi_1|_N$. $\varphi_1: N\longrightarrow G_1$.

$\varphi_1(N)=\pi_1(N)\triangleleft G_1$

(<u>טענה:</u> אם $\pi:G\to H$ אפימורפיזם, $N\triangleleft G$, אז $\pi(N)\triangleleft H$)

לא ייתכן $\pi_1(N)=1$, אחרת $N\le\ker\pi_1=G_2$, ולכן $N\triangleleft G_2$, סתירה לכך ש- G_2 פשוטה, ו- $N_2\neq G_2,\{1\}$.

אבל G_1 פשוטה, $\pi_1(N)\neq 1$, $\pi_1(N)\triangleleft G_1$, לכן $\pi_1(N)=G_1$.

φ_1 אפימורפיזם, $\ker\varphi_1=N\cap G_2\triangleleft G_2$

ו- G_2 פשוטה, לכן $N\cap G_2=\{1\}$ או $G_2\le N$.

יש סדרה נורמלית $1\triangleleft\ker\varphi\triangleleft N$, מנותיה כוללות $N/\ker\varphi_1\cong G_1$

לכן G_1 היא בתוך מנות ההרכב של N.

באותו אופן גם G_2 היא מנת הרכב של N.

$$1\triangleleft\cdots\triangleleft \underset{G_2}{N_2}\triangleleft \underset{G_1}{N_1}\triangleleft N$$

נניח $G_1\not\cong G_2$, $|N|$ מתחלק ב- $|G_1|\cdot|G_2|$ (מהסדרה הנורמלית למעלה).

כלומר, N מתחלק ב- $|G|$, לכן $N=G$ $\Leftarrow$ סתירה.

נניח $G_1\cong G_2$ וחבורה זו מופיעה פעמיים כמנת הרכב של N.

גם אז $N=G$, מאותה סיבה.

נותר המקרה שבו $G_1\cong G_2$ וחבורה זו מופיעה פעם אחת בלבד כמנת הרכב של N.

קיימת סדרה נורמלית $1\triangleleft N\triangleleft G$ שניתן לעדן לסדרת הרכב,

אבל $1\underset{G_1}{\triangleleft}G_1\underset{G_2}{\triangleleft}G$ היא סדרת הרכב, לכן $1\triangleleft N\triangleleft G$ היא כבר סדרת הרכב, וגורמיה G_1,G_2 באיזה סדר, בפרט $N\cong G_1$ או $N\cong G_2$. אבל הנחנו $G_1\cong G_2$ ולכן N איזומורפית לשתיהן.

הערה: יש איזומורפיזם $\varphi: G_1 \to G_2$ כך ש- $N = \{(g_1,g_2) : g_2 = \varphi(g_1)\}$
ונותר להוכיח ש- N כזו איננה נורמלית ב-G.
מקרה פרטי: $G_1 = G_2$.

לא נמשיך את ההוכחה, אבל הכיוון להמשך הוא למצוא איבר להצמיד בו את N
כך ש-N לא יישמר (וכאן משתמשים באי-חילופיות).

(מ׳ II) במבחן לא יהיה צורך לנסח טענות. כן יכול להיות שנצטרך להגדיר
מושגים.

לא ניתן לענות על סעיפים משאלות שונות.
יש לענות על $\underline{\underline{4}}$ שאלות מתוך $\underline{\underline{6}}$.

29/11/09

אלגברה ב' 1 - תרגול 13

תרגול חזרה

1. תהי G חבורה סופית ותהי P חבורת p-סילו שלה.
צ"ל

$$p \mid (G:P)-(N(P):P)$$

פתרון:

$$(G:P)-(N(P):P) = (G:N(P))(N(P):P)-(N(P):P)$$
$$= (N(P):P)((G:N(P))-1)$$

מספר חבורות ה-p-סילו ב-G הוא $(G:N(P))$, ולכן

$$(G:N(P)) = n_p \equiv 1 \pmod p$$

ולכן p מחלק את $(G:N(P))-1$. □

2. תהי G חבורה חילופית סופית. נניח שלכל d כך ש: $d \mid |G|$ יש $\le d$ איברים ב-G מסדר d.
צ"ל G מעגלית.

תשובה: נניח בשלילה שיש p ראשוני כך ש- p^{a_1}, p^{a_2} ו- $a_1,a_2>0$, מופיעים ברשימת המחלקים האלמנטריים. אחרת $G \cong \bigoplus_{i=1}^{k} \mathbb{Z}_{p_i^{a_i}}$ כל הראשוניים שונים זה מזה ואז G ציקלית.
אז $G \cong \mathbb{Z}_{p^{a_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p^{a_2}} \oplus \dots$

לכן יש a,b ב-G מסדר p: ניקח $a \in \mathbb{Z}_{p^{a_1}}$ ו- $b \in \mathbb{Z}_{p^{a_2}}$ ונקבל $\langle a\rangle \oplus \langle b\rangle \cong \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$
ומכאן $p^2-1>p$ איברים מסדר p בסתירה.

3. הוכיחו שלחבורה לא חילופית מסדר p^3 קיים $|Z(G)|=p$.

תשובה:

$$|G/Z(G)| \in \{1, p, p^2, p^3\}$$

האפשרות 1 נפסלת, כי החבורה לא חילופית. האפשרות p^3 נפסלת, כי לחבורת-p יש מרכז לא טריוויאלי.
אם $|G/Z(G)|=p$, נקבל סתירה, כי הוכחנו שאם יש $H \le Z(G)$ כך ש- G/H ציקלית אז G חילופית.
לכן $|G/Z(G)|=p^2$ ולכן $|Z(G)|=p$.

4. הוכיחו שכל חבורת p חילופית סופית לא-מעגלית מכילה תת-חבורה לא מעגלית מסדר p^2.

תשובה: אותו טיעון שבו השתמשנו קודם:

$$G \cong \mathbb{Z}_{p^{a_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p^{a_2}} \oplus \dots$$

והתת"ח המבוקשת $\cong \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$.

. תהי G חבורה, תהי $H \leq G$ מאינדקס 5. יהי $a \in Z(G)$ מסדר 3.
צ"ל $a \in H$.

<u>תשובה:</u> $H \leq Z(G)H \leq G$. אז

$5 = (G:H) = (G:Z(G)H)(Z(G)H:H)$

אם $(Z(G)H:H) = 1$ אז $Z(G)H = H$ (וסיימנו).
אחרת, $(Z(G)H:H) = 5$, ואז $G = Z(G)H$. לכן $H \triangleleft G$

$(gH = zhH = Hzh = Hg)$

כעת, $aH \in G/H$.
הסדר של aH מחלק את 3, וגם מחלק את 5. מכאן הסדר שלו 1, aH הוא היחידה, ומכאן $a \in H$.

(!) בתרגיל 11, שאלה 6, הייתה טעות. סעיפיה היו:
א. צ"ל חבורת סילוב-11 נורמלית.
ב. היה שגוי. צריך היה להיות כתוב: צ"ל חבורת סילוב-7 חלקית למרכז.

<u>תשובה לסעיף</u> ב: $n_7 \equiv 1 \pmod 7$, $n_7 \mid 33$ $\Leftarrow$ $n_7 = 1$.
נסמן Q חבורת סילוב-7.
$|G/Q| = 33$, לכן G/Q ציקלית ובפרט חילופית.

$= 3 \cdot 11$, $q = 3$, $p = 11$, $q \nmid p-1$

לכל $g \in G$, $q \in Q$, $q^{-1}g^{-1}qg \in Q$. ניקח $g \in P$. אז $q^{-1}g^{-1}qg \in \underbrace{Q \cap P}_{= \{e\}}$
$qp = pq$ לכל $q \in Q$, $p \in P$.
⟨כאן אולי לא מצליח להיזכר למה זה גורר את מה שרצינו להוכיח⟩

. . .

~~$q \; p \; q \; p$~~

6. תהא G חבורה סופית, $H \triangleleft G$. $P \leq G$ חבורת סילוב-p. צ"ל
$H \cap P$ חבורת סילוב-p של H.

<u>תשובה:</u> אם Q חבורת סילוב-p של H, אז $\exists g \in G: gQg^{-1} \leq P$
אבל
$gQg^{-1} \leq gHg^{-1} = H$
$\Leftarrow$ $gQg^{-1} \leq P \cap H$ $\Leftarrow$ $P \cap H$ סילוב-p של H.

יהיו $P_1, P_2 \leq G$ חבורות סילוב-p. צ"ל $P_1 \cap P_2$ זו חבורת סילוב-p של $N(P_1) \cap N(P_2)$
<u>תשובה:</u> $N(P_1) \cap N(P_2) \geq P_1 \cap P_2$ חבורת-p.
נניח שיש $H \leq N(P_1) \cap N(P_2)$ חבורת-p כך ש: $P_1 \cap P_2 \leq H$. אז $x \in H$, יש n כך ש: $o(x) = p^n$
$\Leftarrow$ $x \in N(P_1)$ $\Leftarrow$ x שייך לחבורת סילוב-p של $N(P_1)$, לכן $x \in P_1$. כנ"ל $x \in P_2$ $\Leftarrow$ $x \in P_1 \cap P_2$ $\Leftarrow$ $P_1 \cap P_2 \supseteq H$.