25.12.08

אלגברה ב' 1 - תרגול

טענה: נניח G פשוטה וקיימת $H<G$ כך ש: $(G:H)=p$ ו-p ראשוני.

צ"ל p הוא הראשוני המקסימלי כך ש:

$p \mid |G|$ וגם $p^2 \nmid |G|$

[הערה: G פשוטה $\Leftarrow$ ($H \triangleleft G$ $\Leftarrow$ $H=\{e\}, G$)]

הוכחה: נתבונן בפעולה של G על קבוצת המחלקות השמאליות: $X = G/H$.

(X בהנחה חבורה) $g(aH)=gaH$

ממשפט קיילי יש הומומורפיזם

$$\varphi : G \longrightarrow S(X) \cong S_p$$

האיזו': $\varphi(g)(x) = gx$

במקרה שלנו X מחלקות שמאליות

מתקיים: $\ker\varphi \le H < G$ (כי אם $g \in \ker\varphi$ אז: $aH = \varphi(g)\cdot a \cdot H = gaH$ לכל $a \in G$ ובפרט $H = gH$)

G פשוטה $\Leftarrow$ $\ker\varphi = \{e\}$, לכן φ מונומורפיזם.

לכן: $|G| = |\mathrm{Im}\,\varphi| \mid p!$

אם q ראשוני כך ש: $q \le p \Leftarrow q \mid p! \Leftarrow q \mid |G|$

q ראשוני

ברור ש: $p \mid |G|$ לכן $p^2 \nmid |G|$ (כי אם $p^2 \mid |G|$ אז $p \mid (p-1)!$ [סתירה])

□

מכפלות ישרות

נניח G_1,G_2 חבורות, הגדרתם (ממה הוא מנסה להתחמק?) $G=G_1\times G_2$

$G=\{(g_1,g_2) \mid g_i\in G_i\}$ (דוגמא $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$)

מכפלה ישרה (פנימית): נניח ש: $H_1,H_2\le G$ כך ש:

$H_i \trianglelefteq G$ $(i=1,2)$, $H_1\cap H_2=\{e\}$ וגם $G=\langle H_1,H_2\rangle$ אז

נאמר כי G מכפלה ישרה פנימית של H_1,H_2

והוכחתם $G\cong H_1\times H_2$

דוגמא: $GL_n(F) > D_n=\left\{\begin{pmatrix} d_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & d_n\end{pmatrix} \,\middle|\, d_i\in F^\times\right\}$

נסמן: $D_i=\left\{\begin{pmatrix} d_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & d_n\end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{matrix} d_p=1 : p\neq i \text{ לכל} \\ d_p\in F^\times\end{matrix}\right\}$ ל- $1\le i\le n$

ברור ש: $D^i \trianglelefteq D_n$ (חילופית)

Π?

$D^i\cap\langle D^1,\dots,\hat{D^i},\dots,D^n\rangle=\{e\}$ לכל i, לכן: $D_n\cong \bigtimes_{i=1}^{n} D^i$

אבחנה: יהיו $G_1,\dots,G_k$ חבורות, ותהי $G=\bigcap_{i=1}^{k} G_i$

נתבונן בהעתקה: $f: G\to G_1\times\cdots\times G_k$ המוגדרת ע"י

$f(g)=(g,\dots,g)$

f נקראית שיכון אלכסוני (צריך להוכיח...)
(מונומורפיזם)

נבקיר $p_i: G_1\times\cdots\times G_k\to G_i$ ע"י $p_i(g_1,\dots,g_k)=g_i$ - אפימורפיזם

זו ההטלה הטבעית על הרכיב ה-i.

שאלה: הוכח/ הפרך: $L\oplus H \cong K\oplus H \Rightarrow L\cong K$?

תשובה: נבדוק $K\oplus H\to K$ הגרעין הוא $1\oplus H$ אך (שלא איזו' ?):

$$L \cong \frac{L\oplus H}{1\oplus H} \not\cong \frac{K\oplus H}{1\oplus H} \cong K$$

לא! ← משפט ההתאמה

← אני יודע מה זה $\frac{\varphi(L\oplus H)}{\varphi(1\oplus H)}$.

← הבעיה היא שאני לא יודע מה זה.

דוגמה נגדית: $L=\{f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}\}$, $(f+g)(n)=f(n)+g(n)$

נראה כי $\mathbb{Z}\oplus L\cong L$ ואז: $\mathbb{Z}\oplus L\cong 0\oplus L \Rightarrow$

חלוקה ב-L

$\Rightarrow \mathbb{Z}\cong\{0\} \Rightarrow$ סתירה!

ל: $l\in\mathbb{Z}$, $f\in L$ נגדיר $f'\in L$ ע"י:

$$f'(1)=l$$

$$f'(n)=f(n-1)$$

תבדקו ש: $(l,f)\longmapsto f'$ היא איזומורפיזם.

מזה ינבע $L\oplus\mathbb{Z}\cong L$ ונגיע לסתירה.

תמורות

טענה: $(a_1\cdots a_k)^{-1}=(a_k\cdots a_1)$

הוכחה: נסמן $\sigma=(a_1\cdots a_k)$, $\gamma=(a_k\cdots a_1)$ ונחשב את:

$$\sigma\circ\gamma(x)=\begin{cases}\sigma(x)=x & x\neq a_i\ (\forall i)\\ \sigma(a_{i-1})=a_i & x=a_i\ (i>1)\\ \quad\uparrow\ a_{i-k}\neq a_k & \\ \sigma(a_k)=a_1 & x=a_1\end{cases}$$

אחרי השלב קל למצוא תמורה הפוכה:

$$\big((12)\circ(341)\big)^{-1} = \big((143)\circ(21)\big)$$

$\varepsilon : S_n \to \{\pm 1\}$ - סימן של תמורה.

$\varepsilon = \text{sgn}$

$$\varepsilon\big((123)(12)\big) = \varepsilon(123)\cdot\varepsilon(12) = (-1)^{3-1}\cdot(-1)^{2-1} = -1$$

אנחנו נראה בתרגול: $o\big((a_1 \dots a_k)\big) = k$

שאלה: האם $C_8 \cong C_2 \times V_4$?

(V_4 – קליין)

תשובה: לא! נראה שמס' האיברים מסדר 2 שונה.
באגף ימין כל איבר $\neq e$ הוא מסדר 2 כי

$$(x,y)^2 = (x^2, y^2) = (e,e) \qquad \begin{pmatrix} x \in C_2 \\ y \in V_4 \end{pmatrix}$$

עבור אגף שמאל נבחר יוצר ציקלי, הוא כמובן לא
מסדר 2. $\square$