22/1/09

אלגברה ב' 1 - תרגול 12

חבורות פיתול

תהי G חבורה חילופית. נסמן $G^t=\{g\in G: \mathrm{ord}(g)<\infty\}\le G$ = חבורת הפיתול של G.

G חסרת פיתול אם $G^t=\{e\}$. G חבורת פיתול אם $G^t=G$.

<u>שאלה:</u> מצאו את חבורת הפיתול של $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

<u>תשובה:</u> ניקח $q\in\mathbb{Q}$, $q=\frac{m}{n}$, $m,n\in\mathbb{Z}$ ומתקיים:

$n(q+\mathbb{Z}) = nq+\mathbb{Z}=\mathbb{Z}$

להיפך, אם $r\in\mathbb{R}$ ויש $n\in\mathbb{N}$ כך ש:

$n(r+\mathbb{Z}) = nr+\mathbb{Z}=\mathbb{Z}$

$\Rightarrow nr=m\in\mathbb{Z}\Rightarrow r\in\mathbb{Q}$.

לסיכום $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^t=\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. □

חבורות קומו' נ"ס

תהי G חבורה חילופית נוצרת סופית.

1) $G\cong \mathbb{Z}_{m_1}\oplus\mathbb{Z}_{m_2}\oplus\dots\oplus\mathbb{Z}_{m_n}\oplus\mathbb{Z}^r$

כאשר $m_1|m_2|\cdots|m_n$, $r\ge 0$.

$m_1,\dots,m_n$ נקראים <u>גורמים אינווריאנטים</u>.

2) נניח $m_i=\prod_{j=1}^{k_i} p_{ij}^{a_{ij}}$ פירוק לגורמים, אז:

$$G\cong \left(\bigoplus_{j=1}^{k_1}\mathbb{Z}_{p_{1j}^{a_{1j}}}\right)\oplus\left(\bigoplus_{j=1}^{k_2}\mathbb{Z}_{p_{2j}^{a_{2j}}}\right)\oplus\dots\oplus\left(\bigoplus_{j=1}^{k_n}\mathbb{Z}_{p_{nj}^{a_{nj}}}\right)\oplus\mathbb{Z}^r$$

$\{p_{ij}^{a_{ij}}\}_{i,j}$ נקראים מחלקים אלמנטריים.

הגורמים האינווריאנטים (והמחלקים האלמנטריים) ו-r <u>נקבעים ביחידות</u> (למשל $\mathbb{Z}_4\not\cong\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$). (למשל נוסף, $\mathbb{Z}^{15}\oplus\mathbb{Z}_4\not\cong\mathbb{Z}^{15}\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$).

<u>שאלה:</u> נניח $G=\mathbb{Z}_{1500}\oplus\mathbb{Z}_{40}+\mathbb{Z}_{35}$.

א. מצאו גורמים אינווריאנטים ומחלקים אלמנטריים.

<u>תשובה:</u> נמצא מחלקים אלמנטריים:

$35=5\cdot 7,\ 40=2^3\cdot 5,\ 1500=5^3\cdot 3\cdot 2^2$

בשיעור הוכחנו: אם $m=\prod_{i=1}^{l'} p_i^{l_i}$, $p_i\ne p_j$.

אז $\mathbb{Z}_m\cong\mathbb{Z}_{p_1^{a_1}}\oplus\mathbb{Z}_{p_2^{a_2}}\oplus\dots+\mathbb{Z}_{p_{l'}^{a_{l'}}}$. לכן $G\cong(\mathbb{Z}_{5^3}\oplus\mathbb{Z}_3\oplus\mathbb{Z}_{2^2})\oplus(\mathbb{Z}_{2^3}\oplus\mathbb{Z}_5)\oplus(\mathbb{Z}_5\oplus\mathbb{Z}_7)$

כיוון שהצגה 2) יחידה נקבל שהמחלקים האלמנטריים הם:

$5^3, 3, 2^2, 2^3, 5, 5, 7$

נרשום בשורה הראשונה את הראשוני שמופיע הכי הרבה פעמים

$$\begin{array}{ccc} 5 & 5 & 5^3 \\ 1 & 2^2 & 2^3 \\ 1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 3 \\ \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{array} \Rightarrow$$

נמצאו גורמים אינווריאנטיים:

$m_1 = 5$

$m_2 = 20$

$m_3 = 5^3 \cdot 2^3 \cdot 7 \cdot 3$

$= 21{,}000$

$$\Rightarrow G \cong \underbrace{\mathbb{Z}_5}_{\mathbb{Z}_{m_1}} \oplus \underbrace{\mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_{2^2}}_{\mathbb{Z}_{m_2}} \oplus \underbrace{\mathbb{Z}_{5^3} \oplus \mathbb{Z}_{2^3} \oplus \mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_3}_{\mathbb{Z}_{m_3}}$$

שאלה: ב. מצאו חבורת סילוב-5 ב-G.

תשובה:

$$G \cong \underbrace{\mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5 + \mathbb{Z}_{5^3}}_{\text{זו החבורה המבוקשת}} \oplus \ldots$$

שאלה: ג. מצאו את כל תת-החבורות מסדר 5 ומסדר 25 של G.

תשובה: באופן כללי, לחבורה חילופית G ול-$m \in \mathbb{N}$, נגדיר:

$$G_m = \{g \in G : ord(g) \mid m\}$$

מתקיים: אם $G = \bigoplus_{i=1}^{k} G_i$, אזי

$$G_m = \bigoplus_{i=1}^{k} (G_i)_m$$

$$|(G)_5| = \underbrace{|(\mathbb{Z}_5)_5|}_{5} \cdot \underbrace{|(\mathbb{Z}_5)_5|}_{5} \cdot \underbrace{|(\mathbb{Z}_{5^3})_5|}_{5} = 125$$

אחד מאיברים האלה הוא היחידה, ולכן יש 124 איברים בדיוק מסדר 5.

אם ℓ הוא מספר החבורות בנות 5 איברים, אזי

$$\ell = 124/4 = 31$$

- נאלצתי לעצור באמצע התרגול -