

(*) יש בודק תרגילים בקורס, ולפיכך יש ~~בדוק~~ חומר הפסה, והתרגילים "חשבו בציון, כפי שנאמר בתרגול מס' 1.
שני דגשים להפסה:

- לכתוב על שני צידי הדף, משפחות של איכות הסביבה.
- לא להגיש תרגילים בתרגילים.

מ-חבורה

טענה: תהי G חבורה. $\phi \neq H \subseteq G$ היא ת"ח של $G \Leftrightarrow$ לכל $a, b \in H$, $ab^{-1} \in H$.

הוכחה: ($\Leftarrow$) ברור.

($\Rightarrow$) יחידה: תהי $h \in H$ (קיים כזה, כי $H \neq \emptyset$), אז:

$$e = hh^{-1} \in H$$

הפכי: נניח כי $h \in H$. הראינו כבר כי $e \in H$ ומתקיים:

$$h^{-1} = e \cdot h^{-1} \in H$$

אסוציאטיביות: ברור כי האסוציאטיביות "נושגת" מ- G .

סגירות: יהיו $a, b \in H$. הראינו כבר ש: $b^{-1} \in H$ ודמיון:

$$ab = a(b^{-1})^{-1} \in H$$

דוגמה: $\phi \neq SL_n(\mathbb{C}) \subseteq GL_n(\mathbb{C})$ היא ת"ח, כי לכל $a, b \in SL_n(\mathbb{C})$,

$$\det(ab^{-1}) = \det a \cdot \det b^{-1} = 1 \cdot 1 = 1$$

ודמיון $ab^{-1} \in SL_n(\mathbb{C})$.

מחלקות שמאליות (או ימניות)

$$G/H = \{gH : g \in G\}$$

$H \leq G$ חבורה. הצגנו קשיחות:

gH היא מחלקה שמאלית מוצגת ב- H .

כפי שלמדנו:

$$g_1H = g_2H \Leftrightarrow g_2^{-1}g_1 \in H$$

דוגמה: $G = \mathbb{Z}$, $H = n\mathbb{Z}$ ($n \geq 2$). קל לראות שמתקיים $H \leq G$.

$$a+H = b+H \Leftrightarrow -b+a \in H \Leftrightarrow a-b \in n\mathbb{Z} \Leftrightarrow n|a-b \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{n}$$

$$G/H = \{n\mathbb{Z}, n\mathbb{Z}+1, n\mathbb{Z}+2, \dots, n\mathbb{Z}+(n-1)\} \Rightarrow |G/H| = n$$

דוגמאות: (א) $H = \{e\} \leq G$, אזי: $G/H = G$, כ"י

$$g_1 g_2 \Leftrightarrow g_2^{-1} g_1 = e \Leftrightarrow g_2^{-1} g_1 \in H$$

$$G/H = \{gH : g \in G\} = \{g : g \in G\} = G$$

$$G/H = \{eH\}$$

(ב) $H = G$, אזי:

$$|G| = (G:H) |H|$$

משפט לגרנג'ה

כפי שראינו בשיעור:

הרצף: נאמן $G \supseteq H \supseteq K$, הוכחה:

$$(G:K) = (G:H)(H:K)$$

$$\frac{|G|}{|K|} = \frac{|G|}{|H|} \cdot \frac{|H|}{|K|}$$

הערה: הטענה ברורה במקרה הסופי, כי היא שקולה ל:
המקרה האינסופי. המקרה המלא נכון הוא המקרה האינסופי.

$$\varphi: (G/H) \times (H/K) \rightarrow (G/K)$$

הוכחה: נגדיר פונקציה:

נבחר נציגים $\{g_i\}_{i \in I}$ - (G/H) , ו- $\{h_j\}_{j \in J}$, נציגים (H/K) .

$$\varphi(g_i H, h_j K) = g_i h_j K$$

נגדיר:

$$\phi \neq x = g_i h_j K = g_i \underbrace{h_j K}_{\in H} \quad \varphi \text{ חתום: נניח}$$