13/11/08

אלגברה ב' 1 - תרגול 2

__חוגים__

__הגדרה:__ שלשה $\langle R,+,\cdot\rangle$ תקרא חוג אם: $\langle R,+\rangle$ חבורה אבלית (חילופית), פעולת הכפל אסוצ' ומתקיים חוק הפילוג:

$$a(b+c)=ab+ac$$
$$(a+b)c=ac+bc$$

__סימונים:__ האיבר הניטרלי לחיבור מסומן 0; לאיבר הניטרלי לחיבור קוראים "נגדי", ומסמנים $-x$; אם יש איבר ניטרלי לכפל, מסמנים אותו 1 וקוראים לו "יחידה".

__דוגמאות:__ א. $F[x_1,\dots,x_n]$ חוג הפולינומים ב-n משתנים מעל שדה F.

ב. חוג השלמים של גאוס:

$$\mathbb{Z}[i]=\{a+bi : a,b\in\mathbb{Z}\}$$

נראה סגירות לכפל ולחיבור:

$$\cdot\ (a+bi)+(c+di)=\underbrace{(a+c)}_{\in\mathbb{Z}}+\underbrace{(b+d)}_{\in\mathbb{Z}}i\in\mathbb{Z}[i]$$

ובאופן דומה מראים זאת לכפל.

איבר ניטרלי לחיבור: $0=0+0i$

אסוצ' וחוק הפילוג מתקיימים כי הם מתקיימים ב-$\mathbb{C}$.

איבר יחידה: $1=1+0\cdot i$

חילופיות הכפל מתקיימת כי היא מתקיימת ב-$\mathbb{C}$.

האם זהו תחום שלמות? כלומר, האם $a\cdot b=0 \Leftarrow a=0$ או $b=0$? כן, כי $\mathbb{Z}[i]\subseteq\mathbb{C}$.

$\mathbb{Z}[i]$ איננו שדה, כי יש בו איברים ללא הופכי. למשל ל-$(1+i)$ אין הופכי. נניח בשלילה שהיה לו:

$$(a+bi)(1+i)=1 \Leftrightarrow (a-b)+(a+b)i=1$$

$$\Leftarrow a=-b \Leftarrow \quad 1=a-b=-2b$$

וזה לא יתכן, שכן b הוא מספר שלם.

הוכחה אלטרנטיבית: אנחנו יודעים שההופכי (היחיד) של $1+i$ ב-$\mathbb{C}$ הוא $\frac{1-i}{2}$, וזה לא שלם גאוס.

עוד דוגמאות:

ג. קבוצת כל סדרות הממשיים המתכנסות, תחת פעולות לפי רכיבים:

$$a+b=\{a_n+b_n\}_{n=1}^{\infty} \qquad a\cdot b=\{a_n\cdot b_n\}_{n=1}^{\infty}$$

סגירות לכפל, למשל, נובעת מהמשפט לפיו

$$\begin{cases} a_n\longrightarrow\alpha \\ b_n\longrightarrow\beta \end{cases} \Rightarrow a_nb_n\longrightarrow\alpha\beta$$

אסוציאטיביות:

$$(a+b)+c=\{a_n+b_n\}+\{c_n\}=\{(a_n+b_n)+c_n\}=\{a_n+(b_n+c_n)\}=\{a_n\}+\{b_n+c_n\}=a+(b+c)$$

זה לא תחום שלמות:

$$(1,0,0,0,\dots)\cdot(0,1,0,0,0,\dots)=(0,0,0,\dots)$$

איבר היחידה: $(1,1,1,\dots)$

איבר בקבוצה הוא הפיך אמ"ם כל איבר בסדרה שונה מ-0, והסדרה לא שואפת ל-0.

<u>הוכחה</u>: כיוון ראשון: נגדיר $b_n=a_n^{-1}$. אזי $b_n\to\frac{1}{\alpha}$ כאשר $a_n\to\alpha$.

$b=\{b_n\}$ מקיימת: $a\cdot b=b\cdot a=\{a_n\cdot b_n\}=\{1\}=1$

ומאחר שאיברי a לא שואפים ל-0, b מתכנסת ולכן היא איבר בחוג.

כיוון שני: אם a הפיכה, יש איבר שמקיים $a\cdot b=b\cdot a=1$

לכן לכל n, $a_n\cdot b_n=1$. לכן $a_n\neq 0$.

b שייכת לקבוצה, לכן היא בפרט חסומה, ומכאן: אם $a_n\to 0$ נובע מכך $a_n\cdot b_n\to 0$ בסתירה לכך ש: $ab=1$. □

הומומורפיזמים

יהיו R,C חוגים. $f:R\to C$ ייקרא הומומורפיזם אם:

$$f(a+b)=f(a)+f(b) \qquad f(ab)=f(a)f(b)$$

דוגמאות

1. <u>הגבול</u> הוא הומומורפיזם מחוג הסדרות שהגדרנו קודם לממשיים.
2. גם <u>פונקציה ששווה לאיבר הראשון</u> היא הומומורפיזם מחוג זה לממשיים.
3. $\mathbb{Z}[i]\cong\left\{\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}: a,b\in\mathbb{Z}\right\}$

תרגיל: ל- $\mathbb{Z}$ אין אוטומורפיזם (איזומורפיזם ממבנה לעצמו) פרט לטריוויאלי.

פתרון: תהי: $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ איזומורפיזם. נראה שמתקיים $f(1)=1$.

באופן כללי, אם $f:R\to L$ הומומורפיזם על ויש יחידה 1 ב- R, אזי $f(1)$ יחידה ב- L (אלא אם כן L הוא חוג האפס). זה נכון, כי לכל $\ell\in L$:

$$\ell\cdot f(1)=f(x)\cdot f(1)=f(x\cdot 1)=f(x)=\ell$$

לכל $n\geq 1$ טבעי,

$$f(n)=f(\underbrace{1+1+\dots+1}_{n})=\underbrace{f(1)+\dots+f(1)}_{n}=n\cdot f(1)=n$$

מאחר ש- ℓ הומומורפיזם חיבורי:

$$f(-n)=-f(n)=-n$$

וזה מסיים את ההוכחה.

הערה: $x\mapsto -x$ אוטומורפיזם של $\mathbb{Z}$ כחבורה תחת חיבור.

תרגיל: מצאו את כל האוטומורפיזמים של $\mathbb{Z}[i]$.

פתרון: יהי φ אוטומורפיזם. אזי $\varphi(1)=1$.

מתקיים

$$\varphi(i)=\pm i \Leftarrow \varphi(i)^2+1=0 \Leftarrow \varphi(i^2+1)=\varphi(0) \Leftarrow i^2+1=0$$

בחירה של $\varphi(i)$ קובעת את φ חד-משמעית, כי:

$$\varphi(a+bi)=\varphi(a)+\varphi(b)\varphi(i)=a+b\varphi(i)$$

לסיכום, יש שני אוטומורפיזמים ל- $\mathbb{Z}[i]$:

הזהות $(z\mapsto z)$ וההצמדה $(z\mapsto \bar{z})$.

תרגיל: תהי G חבורה. ל- $a\in G$ נגדיר: $f_a(g)=a^{-1}ga$. הראו כי f_a אוטו'.

הוכחה: $f_a\circ f_{a^{-1}}=id$,

$$f_a(gh)=a^{-1}gha=a^{-1}gaa^{-1}ha=f_a(g)f_a(h)$$