

11.12.08

גורמים G ו- H (כפוף)

משפט: איזומורפיזם:

סעיף: נניח $H \leq G$ $|G/H| = |H \backslash G|$

הכחקה: עקב $f: G/H \rightarrow H/H$ "ע"

טענה: $f(gH) = Hg$ טענה שההכחקה טובה:

ואכן $Hg_1 = Hg_2 \iff \exists g_1' \in H, g_2' \in H \iff g_1'g_2^{-1} \in H \iff g_1g_2^{-1} \in H \iff Hg_1 = Hg_2$
 $f(g_1H) = f(g_2H)$

טענה חז"ש: טענה שייקייג מההכחקה הנ"ל.

כא כן, ברור כי f על. ואכן $|G/H| = |H \backslash G|$

טענה:

נניח $H < Z(G)$, G/H ציקלית, צ"ל G/H ציקלית.

הוכחה: $Z(G) = \{g \in G \mid gh = hg \forall h \in G\}$

משוואה: נניח $G/H = \langle gH \rangle$ אז $G = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} g^i H$
 נניח $x, y \in G$ אז $x = g^i h_1, y = g^j h_2$

$xy = g^i h_1 g^j h_2 = g^{i+j} h_1 h_2 = g^{j+i} h_2 h_1 = g^j h_2 g^i h_1 = g^j g^i h_2 h_1 = g^{j+i} h_2 h_1 = yx$
 (כא $h_1, h_2 \in Z(G)$)

משפט הרגאנה / איזו: III

נניח $\psi: G_1 \rightarrow G_2$ המאומורפיזם ψ המאמה

בא: $\{ \ker \psi < H_1 \leq G_1 \} \longleftrightarrow \{ H_2 \leq \text{Im } \psi \}$

$H_1 \rightarrow \psi(H_1)$

$\psi(H_1) \leftarrow H_2$
 $\psi(H_1) \cong \psi(H_1)$
 $H_1 \cong \psi(H_1)$

הרגאנה משמאל ממשלית, חלילה, חלילה

$$\frac{G}{\psi(H)} \xleftarrow{H_2} \frac{Im \psi}{H_2}$$

המשפט

רמז: $P \trianglelefteq G$, $M < N$, $M, N < G$ נניח
 G/M קטן ב- P , $|G/M| = 2$

אם $M < N < G$ אז $M/M \cong G/M$ והמשפט
 הולך מעצמו. הוכח: $G/M \cong G/M$ והמשפט
 הולך מעצמו.

$$\{M < H_1 < G\} \xrightarrow{\text{ker } \psi} \{H_1 < G/M\}$$

$$(\psi(M)) = \frac{N}{M} < \frac{G}{M} \text{ וכן } M < N < G$$

$P \trianglelefteq Z(U)$ אז $|P| = 2$ וכן $P \trianglelefteq U$ וכן $P \trianglelefteq G$
 $N/M \cong Z(G/M)$ וכן

$$\frac{\psi(G)}{\psi(M)} = \frac{G/M}{N/M} \cong \frac{G}{N} \text{ וכן } \frac{G}{M}$$

↓
משפט
המשפט

וכן $P \trianglelefteq G$ וכן $P \trianglelefteq G$ וכן $P \trianglelefteq G$

שאלה: נניח $\varphi: H \rightarrow G$ מומונטור, $N \trianglelefteq H$.
 נניח $\ker \varphi \trianglelefteq N \trianglelefteq H$.
 מומונטור φ מוגדר.

מקור: $H/\ker \varphi \cong \text{Im } \varphi$, $\text{Im } \varphi \trianglelefteq G$, $H/\ker \varphi$ חבורה.
 $\text{Im } \varphi$ חבורה $H/\ker \varphi$ וכן $H/\ker \varphi$ חבורה.

נניח N חבורה מרכזית של H .
 $H \rightarrow H/\ker \varphi$
 $\{ \ker \varphi \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq H \} \leftrightarrow \{ H_2 \trianglelefteq H/\ker \varphi \}$

קבוצת $H/\ker \varphi$. $\varphi(N) = N/\ker \varphi \trianglelefteq H/\ker \varphi$ קבוצת
 נקודות $N/\ker \varphi$ חבורה $N/\ker \varphi$.

נניח φ מומונטור, $N \trianglelefteq H$.
 $H/\ker \varphi \rightarrow H/\ker \varphi$

שאלה: נניח $L \trianglelefteq G$, $H, L \trianglelefteq G$.
 $H/L \cong H/(L \cap H) = H/L$

השאלה: נניח $A, C \trianglelefteq G$, $A \cap C = \{e\}$.
 נניח $AC, BC \trianglelefteq G$, $B \trianglelefteq A$, $PA \trianglelefteq A$.
 נניח $BC \trianglelefteq AC$.

$$\frac{AC}{BC} \cong \frac{A}{B \cap C}$$

שאלה: נניח $B = \{e\}$ חבורה.
 חבורה $B = \{e\}$.

הוכחה: $BC \leq AC$

$$AC = \bigcup_{a \in A} aC = \bigcup_{a \in A} UCa = CA \Rightarrow AC \leq C$$

$$BC \leq C \quad \text{לכן} \quad BC \leq AC$$

$$aC \in AC \quad \text{לכן} \quad BC \leq AC$$

$$aC \cap BC = aBC = BaC = BC \cap aC$$

$$BC \leq AC \quad \text{לכן}$$

כדי להוכיח את הטיעון הזה:

הוא:

$$\varphi(a) = aBC \quad \text{לכן} \quad \varphi: A \rightarrow BC$$

לכן φ הוא פונקציה (המיון: $\varphi(a) = aBC$)

$$\therefore aC \cap BC = BC \cap aC$$

$$aC \cap BC = aBC = \varphi(a)$$

לכן

$$\ker \varphi = A \cap BC$$

$$\varphi(x) = xBC = BC \quad \text{לכן} \quad x \in A \cap BC$$

$$x \in BC \iff \varphi(x) = BC \text{ and } x \in A \iff x \in \ker \varphi$$

$$\text{לכן} \quad A \cap BC = B(A \cap C)$$

פעולה של חבורה על קבוצה

נתון X קבוצה, G חבורה. נגדע פעולה

$$G \times X \rightarrow X$$

$$(g, x) \mapsto gx \quad x \in X, g \in G$$

$$(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x) \quad \forall x \in X, g_1, g_2 \in G$$

$$O(x) = \{gx \mid g \in G\} \subseteq X$$

$$G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\} \leq G$$

הממד: G/G_x חבורה פרימטיבית מסדר d

X חבורה על קבוצה

$$(G:G_x) = d$$

$$O(x) = \{g^i x \mid i=0, \dots, d-1\}, |O(x)| = d$$

פרק: ראשית הפיכה:

$$O(x) = (G:G_x) = d$$

כמו כן $g^i x \in O(x)$ וכן כי d הוא מספר

שווה. נגדע $g^i x = g^j x$ $0 \leq i < j < d$

נכנס משפט - $g^j = g^i$

$$g^{j-i} x = x$$

כל $g^{j-i} \in G_x$ $g^{j-i} \in G_x$ $d \mid (j-i)$

כל $g^{j-i} \in G_x$ $d \mid (j-i)$ $G_x = \langle g^d \rangle$ $d \mid (j-i)$