

תת-חבורה נורמלית

הגדרה: תהי $H \leq G$. H תקרא נורמלית, אם לכל $g \in G$ מתקיים:

$$g^{-1}Hg = H$$

שאלה: נניח כי H ת"ח ^{מאינדקס} 2. אזי $H \triangleleft G$.

הוכחה: $H \cup (G \setminus H) = G = H \cup gHg^{-1} = H \cup Hg$

כעת נוכיח כי $g^{-1}Hg = H$ לכל $g \in G$.

אם $g \in H$ זה ברור. אם $g \notin H$ אז $gH = G \setminus H$ ולכן

באופן אופן $gH = G \setminus H$ לכן $gH = Hg \Leftrightarrow g^{-1}Hg = H$.

שאלה: יהיו $M, N \triangleleft G$ צב $MN \triangleleft G$.

הערה: מדוע בכלל MN חבורה? ראוי בשיעור (שיעור 3, פרק 7) שמספיק שאת משהי ת"ח תהיה, כדי שמכפלת תהיה ת"ח.

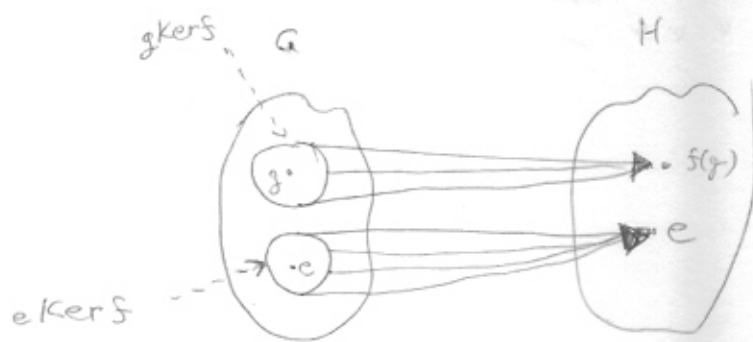
פתרון: $MN = gMg^{-1}gNg^{-1} = gMNg^{-1}$

משפט איז'א' I

משפט: $f: G \rightarrow H$ הומומורפיזם. אז:

$$G/\ker f \cong \operatorname{Im} f$$

$$\varphi(g \ker f) = f(g)$$



צוטעה: נגדיר: $A = \{z \in G \mid \exists n \in \mathbb{N} : z^n = 1\}$ צ"ל $\forall k \in \mathbb{N}^+ \quad A/C_k \cong A$

(C_k - חבורת שורשי היחידה מסדר k)

פתרון: $\varphi: Z \rightarrow Z^k$ היא הומומורפיזם. $\ker \varphi = C_k$. נראה כי:

$$\varphi(A) \subseteq A \quad (1) \quad \varphi(z) \in A \quad \forall z \in A$$

נניח $z \in A$. אזי קיים n כך ש: $z^n = 1$. לכן $(\varphi(z))^n = (z^n)^k = 1$

ומכאן $\varphi(z) \in A$. נניח $z \in A$ אזי קיים n כך ש: $z^n = 1$. אז $\omega^k = z^n = 1$

$$A/C_h \cong A$$

דבר $\omega: A \rightarrow A$ הומומורפיזם, וזהו איזו'ם

עליו: $M, N \triangleleft G$ נניח

(ל) $M \cap N \triangleleft G$ נ"ל

קומוטטורים $G/M \cap N$

(ב) נניח $G/M, G/N$ קומוטטורים, אז

$$\psi(g) = (gM, gN)$$

פונקציה: $\psi: G \rightarrow (G/M) \times (G/N)$, וזו:

$$\psi(gh) = (ghM, ghN) = (gMhM, gNhN) = \psi(g)\psi(h)$$

ψ הומומורפיזם:

$$= (gM, gN)(hM, hN) = \psi(g)\psi(h)$$

$$\ker \psi = \{g \in G : \psi(g) = e_{G/M \times G/N}\} =$$

כבר נראה כי:

$$= \{g \in G : \psi(g) = (M, N)\} = M \cap N$$

ולכן $M \cap N \triangleleft G$

עבור סעיף ב':

נצטרך:

$$\text{Im } \psi \cong G/(M \cap N)$$

$$\text{Im } \psi \leq \underbrace{(G/M) \times (G/N)}_{\text{קומוטטורים}}$$

דבר $\text{Im } \psi$ קומוטטור, ולפיכך זה $G/(M \cap N)$.

$$Z(G) = \{g \in G \mid \forall h \in G : gh = hg\}$$

המרכז: המרכז של G הוא:

$H \triangleleft G$

אבחנה: אם $H \leq Z(G)$ אז

המרכז:

$$gH = \{gh : h \in H\} = \{hg : h \in H\} = Hg$$