

תת-חבורה נורמלית

הגדרה: יהי $H \leq G$. H תיקרא נורמלית, אם לכל $g \in G$ מתקיים:

$$g^{-1}Hg = H$$

שאלה: נניח כי H תת-~~מאונקס~~ ^{מאונקס} של G . אז $H \triangleleft G$.

הוכחה: $H \cup (G \setminus H) = G = H \cup gHg^{-1} = H \cup Hg$

כלומר, נובע כי $g^{-1}Hg = H$ לכל $g \in G$.

אם $H \neq G$ אז $Hg = G \setminus H$.
אם $g \notin H$ אז $gH \neq H$ (כי $gH \cap H = \{e\}$)

באופן אחר $Hg = G \setminus H$ לכן $gH = Hg \Leftrightarrow H = g^{-1}Hg$

שאלה: יהיו $M, N \triangleleft G$, צב $MN \triangleleft G$.

הערה: מדוע ברצוננו חבורה? האין בביטוי (ביטוי ב', פרק 7) שמספיק שאת M ו- N תהיה נורמלית, כדי שמכפלתן תהיה ת"ח?

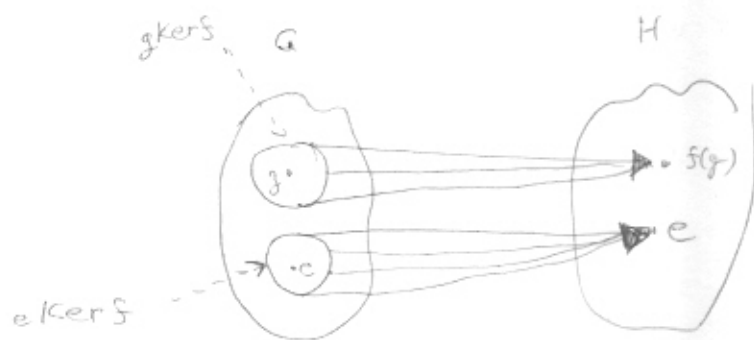
פתרון: $MN = gMg^{-1}gNg^{-1} = gMNg^{-1}$

משפט איז'וארטי

משפט: $f: G \rightarrow H$ הומומורפיזם. אז:

$$G/\ker f \cong \operatorname{Im} f$$

$$\varphi(g \ker f) = f(g)$$



דוגמה: נגדיר: $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists n \in \mathbb{N} : z^n = 1\}$. ציב $\forall k \in \mathbb{N}^+ \quad A/C_k \cong A$

(C_k - חבורת שורשי היחידה מסדר k)

פתרון: $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^* : \varphi(z) = z^k$ היא הומומורפיזם. $\ker \varphi = C_k$. נראה כי:

$$\varphi(A) = A \quad \text{ו} \quad \varphi(z) = z^k$$

$$(\varphi(z))^n = (z^k)^n = 1$$

נניח $z \in A$. אז קיים n כך ש- $z^n = 1$. לכן $\varphi(z) \in A$.

נניח $z \in A$. אז קיים n כך ש- $z^n = 1$. לכן $\varphi(z) \in A$.

$$A/C_k \cong A$$

לכן יש לי דוגמה, כי האוטומורפיזם $\omega: A \rightarrow A$

על ידי: $M, N \triangleleft G$ נניח

לכן $M \cap N \triangleleft G$

קיומם של $G/M \cap N$

כן נניח $G/M, G/N$ קיומם של

$$\psi(g) = (gM, gN)$$

התמונה: $\psi: G \rightarrow (G/M) \times (G/N)$ נגדיר

$$\psi(gh) = (ghM, ghN) = (gMhM, gNhN) =$$

ψ האוטומורפיזם:

$$= (gM, gN)(hM, hN) = \psi(g)\psi(h)$$

$$\ker \psi = \{g \in G : \psi(g) = e_{G/M \times G/N}\} =$$

כעת נבחין כי:

$$= \{g \in G : \psi(g) = (M, N)\} = M \cap N$$

ולכן $M \cap N \triangleleft G$

עבור סעיף ב':

נצטרך:

$$\text{Im } \psi \cong G/(M \cap N)$$

$$\text{Im } \psi \leq \underbrace{(G/M) \times (G/N)}_{\text{קיומם}}$$

לכן אם $\text{Im } \psi$ קומוטטי, ולפיכך גם $G/(M \cap N)$.

$$Z(G) = \{g \in G \mid \forall h \in G : gh = hg\}$$

הערה: המרכז של G הוא:

$$H \triangleleft G$$

אכן: אם $H \leq Z(G)$ אז

המרכז:

$$gH = \{gh : h \in H\} = \{hg : h \in H\} = Hg$$