3/11/08

אלגברה ב'1 – שיעור 1

הערה לעניין ה-notes: חוברת הקורס עשויה להשתנות מעט, אך בכלל הקורס יהיה צמוד לחוברת. כדאי להעזר בה, אבל לא כדאי לנסות ללמוד בסוף הקורס את החוברת. החומר דורש זמן להפנמה, ולכן כדאי ללמוד את הקורס באופן רציף.

חובת הגשה: 70%. לא ברור אם ישפיע על הציון.

שעת קבלה: כדאי לתאם מראש, אבל אפשר פשוט להגיע למשרד.

אזהרה לגבי מבנה הקורס: ברוב הקורס החומר קל, אך השעורים האחרונים פתאום קשים ואינטנסיביים. כמו ב"בדידה".

מבנים אלגבריים

אלגברה ב' עוסקת במבנים אלגבריים, והקורס הזה עוסק ספציפית בחבורות. מבנה אלגברי, באופן בלתי-פורמלי, הוא:

1. קבוצה (לא ריקה), עם:
2. פעולות (בד"כ בינאריות)
3. חוקים

דוגמה למבנה אלגברי: קבוצת הממשיים $\mathbb{R}$ עם פעולות החיבור והכפל, וחוקי החילופיות, הצירוף (אסוציאטיביות) וכו'.

הגדרה: פעולה בינארית על קבוצה S היא העתקה $\pi: S \times S \to S$. לדוגמה, פעולת החיבור היא פעולה בינארית על הממשיים. לרוב מסמנים פעולה בינארית באמצעות סימן בין שני האיברים ($a+b$, $a \cdot b$ וכדומה) או ללא סימן (לדוגמה: ab).

חוקים אפשריים (ונפוצים):

- חוק החילוף (קומוטטיביות): לכל $a,b\in S$: $ab=ba$
- חוק הצירוף (אסוציאטיביות): לכל $a,b,c\in S$: $(ab)c=a(bc)$

<u>דוגמה</u>: תהי X קבוצה, ותהי S קבוצת הפונקציות מ-X ל-X.
נבחן את פעולת ההרכבה של S.
בד"כ ההרכבה לא חילופית, אבל כן אסוציאטיבית:
יהיו $f,g,h\in S$. אזי:

$$f(g(h(x)))=f(g(h(x)))$$
$$\Rightarrow f((g\circ h)(x))=(f\circ g)(h(x))$$
$$\Rightarrow (f\circ(g\circ h))(x)=((f\circ g)\circ h)(x) \qquad (\text{לכל } x\in X)$$
$$\Rightarrow f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h$$

<u>טענה</u>: תהי S קבוצה עם פעולה בינארית $\circ$. אם הפעולה אסוציאטיבית, מתקיים על S חוק הצירוף <u>המוכלל</u>:
יהי $n\geq 2$ ויהיו $a_1,\dots,a_n\in S$. אז סדר ביצוע הפעולות בביטוי:

$$a_1\circ a_2\circ\dots\circ a_n$$

אינו משנה את התוצאה (כלומר, כתיבת סוגריים בביטוי לא משפיעה על התוצאה, וניתן לוותר על הסוגריים).

<u>הוכחה</u>

עבור $n=2$ הטענה ברורה. עבור $n=3$, הנכונות נתונה.
נניח $n>3$ ונניח נכונות החוק המורחב עבור כל $k<n$. אם נחשב את הפעולות בביטוי בסדר מסוים, אז הפעולה האחרונה תהיה: $(a_1\circ\dots\circ a_l)\circ(a_{l+1}\circ\dots\circ a_n)$ $(1\leq l<n)$
(אין צורך לכתוב סוגריים נוספים לפי הנחת האינדוקציה).

עלינו להראות, שלכל $1\leq k,l<n$ מתקיים:

$$(a_1\circ\dots\circ a_l)\circ(a_{l+1}\circ\dots\circ a_n)=(a_1\circ\dots\circ a_k)\circ(a_{k+1}\circ\dots\circ a_n)$$

נראה זאת: בלי הגבלת הכלליות נניח $k<l$.

נכתוב מחדש את אגף ימין:

$$(a_1\circ\dots\circ a_k)\circ((a_{k+1}\circ\dots\circ a_l)\circ(a_{l+1}\circ\dots\circ a_n))$$

נכתוב מחדש את אגף שמאל:

$$(\underbrace{(a_1\circ\dots\circ a_k)}_{u}\circ\underbrace{(a_{k+1}\circ\dots\circ a_l)}_{v})\circ\underbrace{(a_{l+1}\circ\dots\circ a_n)}_{w}$$

נסמן:

כעת אגף ימין הוא: $u\circ(v\circ w)$. אגף שמאל הוא: $(u\circ v)\circ w$.

לפי הנחת האסוציאטיביות, שני האגפים אכן שווים. ■

בהמשך הקורס, כשניתקל ~~בהוכחו~~ בטענות דומות, לא בהכרח נטרח להוכיח אותן.

<u>הגדרה</u>: תהי S קבוצה עם פעולה בינארית $\circ$. $e\in S$ נקרא <u>איבר נייטרלי</u> או <u>איבר היחידה</u> אם:

לכל $s\in S$, $e\circ s=s\circ e=s$

<u>דוגמאות</u>: 1 נייטרלי ביחס לכפל ב-$\mathbb{R}$, ב-$\mathbb{Z}$, ב-$\mathbb{N}$. העתקת הזהות היא איבר נייטרלי ביחס להרכבה בקבוצת הפונקציות מ-X ל-X.

אם קיים איבר נייטרלי, הוא יחיד: נניח בשלילה כי $e\neq e'$, ושניהם איברים נייטרליים. אזי $ee'=e$ (כי e' נייטרלי) וכן $ee'=e'e=e'$ (כי e נייטרלי) ולכן $e=e'$ בסתירה להנחה.

הגדרה: תהי S קבוצה עם פעולה בינארית אסוציאטיבית $\cdot$ ואיבר יחידה e. אזי $a\in S$ נקרא הפיך אם קיים b ב-S, כך שמתקיים: $ab=ba=e$.
b נקרא ההופכי של a.

אם ההופכי ל-a קיים, הוא יחיד. אם b,b' שניהם הופכיים ל-a, אזי: $bab' = (ba)b' = eb' = b'$
אבל: $bab' = b(ab') = be = b$
ולכן $b=b'$.

דוגמאות: כל $0\neq a\in\mathbb{R}$ הוא הפיך ביחס לכפל. 0 אינו הפיך. 0 הינו האיבר הניטרלי ביחס לחיבור ב-$\mathbb{R}$. כל איבר הפיך ביחס לחיבור ב-$\mathbb{R}$, וה"הופכי" של a (שנהוג לקרוא לו "נגדי") הוא $-a$. (לאיבר הניטרלי לחיבור נהוג לקרוא "איבר האפס").