

סדרות הרכבה וחבורת פתירות

חבורת הקומוטטור: נניח ש- G חבורה. עבור $x, y \in G$ (נסמן):

$$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$$

ונקרא לסיומן זה "הקומוטטור של x, y ".
 נגדיר: $G' = \langle \{[x, y] : x, y \in G\} \rangle$ חבורת הקומוטטור.

צאמה: G חילופית $\Leftrightarrow G' = \{e\}$.

$$g[x, y]g^{-1} = [gxg^{-1}, gyg^{-1}] \quad (\text{א})$$

$$G' \triangleleft G \quad (\text{ב})$$

(ג) לכל $H \triangleleft G$ כך ש: G/H אבליה, $G' \leq H$

הוכחה

$$g[x, y]g^{-1} = gxyx^{-1}y^{-1}g^{-1} = gxg^{-1}gyg^{-1}gx^{-1}gy^{-1}g^{-1} = [gxg^{-1}, gyg^{-1}] \quad (\text{א})$$

$$gG'g^{-1} = f_g(G') = f_g(\langle \{[x, y] : x, y \in G\} \rangle) = \quad (\text{ב}) \quad \delta: g \in G$$

$$f_g(x) = gxg^{-1}$$

רפי א'

$$= \langle f_g(\{[x, y] : x, y \in G\}) \rangle = \langle \{[gxg^{-1}, gyg^{-1}] : x, y \in G\} \rangle$$

הצגות הפשוטות
של G/H G/H אבליה(ג) $\delta: G \triangleleft H$, ניקח $[x, y]$:

$$[x, y]H = xyx^{-1}y^{-1}H = xHyHx^{-1}Hy^{-1}H = H \Rightarrow [x, y] \in H \Rightarrow G' \leq H$$

$$[xG', yG'] = xG'xG'^{-1}yG'^{-1} = [x, y]G' = G' \quad (\text{ג}) \quad \text{צ"ל} \quad [xG', yG'] = G'.$$

כמו כן.

הערה: מסעיפים ג' וד' נובע ש- G' היא תת-חבורה המינימלית מבין תת-חבורות הנורמליות של G כך שחבורת המנה שלהן אבליה.

סדרה: $G = G_m \triangleleft G_{m-1} \triangleleft \dots \triangleleft G_1 \triangleleft G_0 = \{e\}$ נקראת סדרה נורמלית. המנוי G/G_{i-1} נקראת מנוי הסדרה. אם כל המנוי פשוט אז זו סדרת הרכב (סדרת צורן-הלדר). אם G סופית והמנוי בסדרת הרכב הן אבליות אז G פתירה.

צאמה: $S_3 \triangleleft A_3 \triangleleft \{e\}$ היא סדרת הרכב, כי המנה של כל מה תבנות עוקבות היא מסדר ראשון, ולכן פשוטה, מכאן, S_3 פתירה.

(הערה: חבורת מסדר ראשון היא ציקלית, פשוטה ואבליה.)

ממה זה חשוב? פתירה של S_n שקולה לקיום משוואה פולינום ממעלה n ! (קבוצת האוטומורפיזמים של שדה הרחבה מדרגה n חלקית ל- S_n , או משהו בסגנון. נראה במסגרת הקורס אוליגברה ק' 2).

הגדרה: $A, B \leq G$ נגזיר: $[A, B] = \{[a, b] : a \in A, b \in B\}$

הגדרה: סדרה G נגזיר $G^{(0)} = G$, $G^{(i)} = [G^{(i-1)}, G^{(i-1)}]$ עבור $i > 0$.

טענה: G פתירה $\Leftrightarrow \{e\} = G^{(n)}$ עבור n מספיק גדול.

הוכחה

כיוון ראשון: $\Leftarrow$ יהי $G = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_{n-1} \triangleleft G_n = \{e\}$ סדרת הרפד עם מנות

אבליה. נראה ש- $G_i \leq G^{(i)}$ לכל i . באינדוקציה על i : בסיס סיו מיידי כי $G_0 = G = G^{(0)}$.

נתבונן במנה G_i / G_{i+1} . זו מנה אבליה, $G_i \triangleleft G_{i+1}$ לכן (מסעיף ג' בסענת

קומטטור) נקבל $G_i' \leq G_{i+1}$ לכן: $G_{i+1} \geq G_i' = [G_i, G_i] \geq [G^{(i)}, G^{(i)}] = G^{(i+1)}$

מתקנת האינדוקציה
 $G^{(i)} \leq G_i$

בפרט $\{e\} = G_n = G^{(n)}$.

כיוון שני - $\Rightarrow$ נניח $\{e\} = G^{(n)}$ ונתבונן בסדרה הבאה:

$$\{e\} = G^{(n)} \triangleleft G^{(n-1)} \triangleleft \dots \triangleleft G^{(1)} \triangleleft G^{(0)} = G$$

זו סדרה נורמלית. מסעיף ב' בסענת קומטטור, המנה $G^{(i)} / G^{(i+1)}$ אבליה

(סעיף ד' באענה...). העידון של סדרה זו יהיה סדרת הרפד עם מנות אבליה

(אם $G^{(i)} / G^{(i+1)}$ פשוטה נעבור הלאה. אחרת נבחר סדרת הרפד ~~בסדרה~~

$\underbrace{G^{(i)} / G^{(i+1)} \triangleleft \dots \triangleleft \{e\}}_{\text{אבליה סופית}} \triangleleft H_j$ נניח H_j קן איברי הסדרה, אז ממסל ההטאה יש

סדרה $G \triangleleft \tilde{H}_1 \triangleleft \dots \triangleleft \tilde{H}_k \triangleleft G^{(i+1)}$ כך ש: $\tilde{H}_i / \tilde{H}_{i-1}$ פשוטה ואבליה, כי כל

ג'ח $H \leq G^{(i)} / G^{(i+1)}$ היא מהצורה $\tilde{H} / G^{(i+1)}$ עבור $(G^{(i+1)} \leq \tilde{H} \leq G^{(i)})$.

לכן G פתירה.

הערות

אפשר להגדיר חבורה פתירה גם כתחבורה אינסופית. אז מסירים את הצרישה. שהמנות פשוטה. למשל, $GL_n(F)$ ($n > 1$, $|F| > 4$) לא פתירה, כי $G' = SL_n(F)$, $SL_n(F)' = SL_n(F)$.