26.4.2010

שיעור 7

<u>הגדרה:</u> $\{x_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{Q}_p$ תקרא סדרת קושי אם קיים

$$\lim_{n,m\to\infty} |x_n - x_m| = 0$$

כלומר לכל $\varepsilon>0$, קיים N טבעי כך שלכל $n,m\geq N$
$|x_n-x_m|\leq\varepsilon$.

<u>משפט:</u> ב- $\mathbb{Q}_p$ כל סדרת קושי מתכנסת.

<u>הוכחה:</u> תהי $\{x_n\}_{n\geq 1}\subseteq\mathbb{Q}_p$ סדרת קושי. נראה סדרה חסומה.
ל- $\varepsilon=1$ בהגדרה, יש N טבעי כך ש:

$$\forall n,m\geq N \quad |x_n-x_m|\leq 1$$

בפרט

$$\forall n\geq N \quad |x_n - x_N|\leq 1$$

$$|x_n| = |x_n-x_N+x_N| \leq |x_n-x_N|+|x_N| \leq 1+|x_N|$$

לכן:

$$\forall k\geq 1 \quad |x_k|\leq \max\{|x_1|,|x_2|,\dots|x_{N-1}|, 1+|x_N|\}$$

ממשפט קודם יש ל- $\{x_n\}_{n\geq 1}$ תת סדרה מתכנסת $\{x_{n_k}\}_{k\geq 1}$
לגבול $a\in\mathbb{Q}_p$. נראה כי $\{x_n\}_{n\geq 1}$ מתכנסת ל- a.

$$|x_n-a|\leq|x_n-x_{n_k}|+|x_{n_k}-a| \xrightarrow[n,k\to\infty]{} 0$$

<u>טענה:</u> סדרת איברים ב- $\mathbb{Q}_p$ היא סדרת קושי אמ"מ קיים:

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$$

<u>הוכחה:</u> אם $\{x_n\}_{n\geq 1}$ היא סדרת קושי, אז התנאי מתקיים בברור.
להפך: נניח כי קיים: $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$
יהי $\varepsilon>0$, קיים N טבעי כך ש:

$$\forall n\geq N,\ |x_{n+1}-x_n|\leq\varepsilon$$

$k\geq 1$, $n\geq N$

$$|x_{n+k}-x_n| = |(x_{n+k}-x_{n+k-1})+(x_{n+k-1}-x_{n+k-2})+\dots+(x_{n+1}-x_n)|\leq$$

$$\leq\max\{\underset{\leq\varepsilon}{|x_{n+k}-x_{n+k-1}|},\underset{\leq\varepsilon}{|x_{n+k-1}-x_{n+k-2}|},\dots,\underset{\leq\varepsilon}{|x_{n+1}-x_n|}\}\leq\varepsilon .$$

מסקנה: טור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס ב-$\mathbb{Q}_p$ אם ורק אם $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \in \mathbb{Q}_p$$

$\{S_n\}_{n\geq 1}$ מתכנסת ב-$\mathbb{Q}_p$ $\iff$ $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

הגדרה: קבוצה $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{Q}_p$ תקרא פתוחה אם לכל $a \in V$, יש $\delta > 0$ כך ש:

$$\{ x \in \mathbb{Q}_p \mid |x-a| < \delta \} \subseteq V$$

הקבוצה הריקה היא פתוחה לפי הגדרה.

קבוצה $F \subseteq \mathbb{Q}_p$ תקרא סגורה, אם $\mathbb{Q}_p \setminus F$ פתוחה.

כיוון ש $|\mathbb{Q}_p^*| = \{p^n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ לכן בהינתן $\delta > 0$, יש n שלם יחיד כך ש $|x-a| < \delta \iff |x-a| < p^n$.

$$\Updownarrow$$

$$|x-a| \leq p^{n-1}$$

לכן V פתוחה אם"ם לכל $a \in V$ קיים $k \in \mathbb{Z}$ כך ש:

$$\{ x \in \mathbb{Q}_p \mid |x-a| \leq p^k \} \subseteq V$$

$$\|$$

$$\{ x \in \mathbb{Q}_p \mid x-a \in p^{-k}\mathbb{Z}_p \} = \{ x \in \mathbb{Q}_p \mid x \in a + p^{-k}\mathbb{Z}_p \}$$
$$= a + p^{-k}\mathbb{Z}_p$$

לכן $V \subseteq \mathbb{Q}_p$ פתוחה, אם לכל $a \in V$ יש n שלם כך ש:

$$a + p^n \mathbb{Z}_p \subseteq V$$

טענה: א. איחוד כלשהו (גם אינסופי) של קבוצות פתוחות הוא
הוא קבוצה פתוחה.

ב. חיתוך של מספר סופי של קבוצות פתוחות הוא
קבוצה פתוחה.

ג. לכל $0 \neq a \in \mathbb{Q}_p$, הפונקציה $f(x) = ax$ מעבירה
קבוצה פתוחה (סגורה) לקבוצה פתוחה (סגורה).

ד. תהי $F \subseteq \mathbb{Q}_p$, אז F סגורה אם ורק אם
לכל סדרה $\{x_n\}_{n\geq 1} \subseteq F$ המתכנסת לגבול $a \in \mathbb{Q}_p \Leftarrow a \in F$.

הוכחה:

א. נניח כי $\{V_i\}_{i\in I}$ היא קבוצה של קבוצות פתוחות. $V=\bigcup_{i\in I} V_i$. יהי $a\in V$. יש $i_0\in I$ כך ש: $a\in V_{i_0}$.
V_{i_0} פתוחה, ולכן יש $\delta>0$ כך ש:
$$\{x\in\mathbb{Q}_p \mid |x-a|<\delta\}\subseteq V_{i_0}\subseteq V$$

ב. נניח כי $V_1,\dots V_m\subseteq\mathbb{Q}_p$ פתוחות. נסמן $V=\bigcap_{i=1}^{m} V_i$
תהי $a\in V$. כיון ש V_i פתוחה ו $a\in V_i$.
יש n_i שלם כך ש: $a+p^{n_i}\mathbb{Z}_p\subseteq V_i$
(כזכור $\cdots\subsetneq p^{j}\mathbb{Z}_p\subsetneq p^{j-1}\mathbb{Z}_p\subsetneq\cdots\subsetneq p\mathbb{Z}_p\subsetneq\mathbb{Z}_p\subsetneq p^{-1}\mathbb{Z}_p\subsetneq\cdots$)
נסמן $r=\max\{n_1,\dots n_m\}$
אז $p^r\mathbb{Z}_p\subseteq p^{n_i}\mathbb{Z}_p \quad \forall 1\le i\le m$
$$a+p^r\mathbb{Z}_p\subseteq a+p^{n_i}\mathbb{Z}_p\subseteq V_i$$
$$\Rightarrow a+p^r\mathbb{Z}_p\subseteq\bigcap_{i=1}^{m}V_i=V$$

ג: $(a\in\mathbb{Q}_p^*)$ $f(x)=ax$. תהי $V\subseteq\mathbb{Q}_p$ פתוחה $f(V)=aV$.
יהי $b\in f(V)$, נכתוב $b=av$, כאשר $v\in V$.
כיון ש V פתוחה, יש n שלם כך ש: $v+p^n\mathbb{Z}_p\subseteq V$.
$$f(v+p^n\mathbb{Z}_p)=av+p^na\mathbb{Z}_p$$
נכתוב $a=p^l u$ כאשר $l\in\mathbb{Z}$, $u\in\mathbb{Z}_p^*$
(כי $u\in\mathbb{Z}_p^*$) $$av+p^na\mathbb{Z}_p=b+p^{n+l}u\mathbb{Z}_p=b+p^{n+l}\mathbb{Z}_p$$

$$F=\mathbb{Q}_p\setminus V\Rightarrow aF=\mathbb{Q}_p\setminus aV$$

ד. נניח כי F סגורה. תהי $\{x_n\}_{n\ge1}\subset F$ מתכנסת ל- $a\in\mathbb{Q}_p$.
צ"ל כי $a\in F$.
נסמן $V=\mathbb{Q}_p\setminus F$, V פתוחה.
נניח בשלילה כי $a\notin F$. אז $a\in V$, וכיון ש-V פתוחה אז
יש $\delta>0$, כך ש: $\{a\in\mathbb{Q}_p \mid |x-a|<\delta\}\subseteq V$
יש N טבעי כך ש $|x_n-a|<\delta$ לכל $n\ge N$.
בפרט $x_N\in V=\mathbb{Q}_p\setminus F$ בסתירה לכך ש $x_N\in F$.

להפך: נניח כי F מקיימת את התכונה מ-(ד).
צ"ל כי F סגורה, נראה כי $V=\mathbb{Q}_p\setminus F$ פתוחה. בשלילה,
אם V אינה פתוחה, אז יש $a\in V$, כך שלכל n טבעי, יש $x_n\notin V$ $(x_n\in F\Leftarrow)$ כך ש: $|x_n-a|<p^{-n}$.

קיבלנו סדרה $\{x_n\}_{n\ge 1}\subseteq F$ כך ש:

$$|x_n - a| < p^{-n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

כלומר $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ ולכן $a\in F$ - סגורה.

<u>מסקנה</u>: א. הקבוצות $a+p^n\mathbb{Z}_p$ הן פתוחות וגם סגורות.

ב. $\mathbb{Z}_p^*$ פתוחה וגם סגורה.

ג. באופן כללי

$a+p^n\mathbb{Z}_p^* = \{x\in \mathbb{Q}_p \mid |x-a| = p^{-n}\}$ פתוחות וגם סגורות.

<u>הוכחה</u>: א. הקבוצה פתוחה: תהי $v = a+p^n b$ $(b\in \mathbb{Z}_p)$.

$$v+p^n\mathbb{Z}_p = a+p^n(b+\mathbb{Z}_p) = a+p^n\mathbb{Z}_p$$

הקבוצה סגורה: נקח סדרה $\{x_k\}_{k\ge 1}\subseteq a+p^n\mathbb{Z}_p$.

$$x_k = a+p^n b_k \qquad b_k\in \mathbb{Z}_p$$

$\{x_k\}$ מתכנסת $\Leftrightarrow$ $\{b_k\}$ מתכנסת. נניח $b_k\to b$)

$$|x_k-a| \le p^{-n}$$
$$\Big\downarrow {\scriptstyle k\to\infty}$$
$$|(a+p^n b)-a| \le p^{-n} \Rightarrow p^{-n}|b| \le p^{-n} \Rightarrow |b|\le 1 \Rightarrow b\in \mathbb{Z}_p$$
$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} x_k = a+p^n b \in a+p^n\mathbb{Z}_p$$

ב. ג.

$$\mathbb{Z}_p^* = \mathbb{Z}_p\setminus p\mathbb{Z}_p = \underset{\text{פתוחה וסגורה}}{\mathbb{Z}_p} \cap \underbrace{(\mathbb{Q}_p\setminus p\mathbb{Z}_p)}_{\text{פתוחה וסגורה}} = \text{פתוחה וסגורה.}$$

<u>הערה</u>: $\mathbb{Z}$ צפופה ב- $\mathbb{Z}_p$ ומכאן $\mathbb{Q}$ צפופה ב- $\mathbb{Q}_p$.

<u>הוכחה</u>: תהי $x\in \mathbb{Z}_p$, נראה שיש סדרה $\{a_n\}_{n\ge 1}\subseteq \mathbb{Z}$ כך ש:

$$x = \lim_{m\to\infty} i(a_m) \qquad (i(a_m) = \{a_m+p^n\mathbb{Z}\}_{n=1}^{\infty})$$

נסמן $\mathbb{Z}_p \ni x = \{x_n\}_{n\ge 1} = \{a_n+p^n\mathbb{Z}\}_{n\ge 1}$.

$$\varepsilon_n : \mathbb{Z}_p \to A_n \qquad \varepsilon_n(\{x_n\}_{n\ge 1}) = x_n \qquad (A_n = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$$

$$\varepsilon_n(x-i(a_n)) = x_n-(a_n+p^n\mathbb{Z}) = p^n\mathbb{Z} \overset{\text{ב-}A_n}{=} 0$$

$$\forall n\ge 1 \qquad x-i(a_n)\in \ker\varepsilon_n = p^n\mathbb{Z}_p$$

כלומר:

$$|x-i(a_n)| \le p^{-n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

כך שראינו ש $\lim_{m\to\infty} i(a_m) = x$.

איבר ב- $\mathbb{Q}_p$ הוא מהצורה $\frac{x}{y}$ כאשר $x, y \in \mathbb{Z}_p$, $y \neq 0$.
נסמן $x = \lim_{n\to\infty} a_n$, $y = \lim_{n\to\infty} b_n$ $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}_p$)
כיוון ש $y \neq 0$ אפשר להניח $b_n \neq 0$ $\forall n$. ולכן:

$$\mathbb{Q} \ni \frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \frac{x}{y}$$

<u>משפט</u>: לכל $x \in \mathbb{Z}_p$ <u>יש</u> הצגה <u>יחידה</u> בצורה:

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n \qquad \forall n \quad 0 \le a_n < p$$

<u>הוכחה</u>: נסמן $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ $x_n = l_n + p^n\mathbb{Z}$ $(l_n \in \mathbb{Z})$
(לכל n $l_{n+1} \equiv l_n \pmod{p^n}$)
יש $0 \le a_0 < p$ <u>יחיד</u> כך ש $l_1 \equiv a_0 \pmod p$
נניח כי מצאנו $a_0, a_1, \dots a_{n-1} \in \{0,1,\dots p-1\}$ כך ש:

$$l_k \equiv \sum_{j=0}^{k-1} a_j p^j \pmod{p^k} \qquad k = 1, \dots n$$

$$l_{n+1} \equiv l_n \pmod{p^n}$$

$$p^n \mid l_{n+1} - l_n$$

נסמן $l_{n+1} = l_n + \alpha p^n$ $\alpha \in \mathbb{Z}$.
לפי ההנחה $l_n = \sum_{j=0}^{n-1} a_j p^j + \beta p^n$ $\beta \in \mathbb{Z}$
נקבל

$$l_{n+1} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j p^j + \gamma p^n \qquad (\gamma = \alpha + \beta)$$

נחלק γ ב-p עם שארית $\gamma = \delta p + a_n$ $(0 \le a_n < p)$.
נקבל:

$$l_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} a_j p^j + \delta p^{n+1} \equiv \sum_{j=0}^{n} a_j p^j \pmod{p^{n+1}}$$

בנינו באינדוקציה סדרה $\{a_n\}_{n\ge0}$ $a_n \in \{0, 1, \dots p-1\}$
כך ש:

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad x_n = \sum_{j=0}^{n-1} a_j p^j + p^n\mathbb{Z}$$

$$\varepsilon\left(x - i\left(\sum_{j=0}^{n-1} a_j p^j\right)\right) = 0_{A_n}$$

$$\left| x - \sum_{j=0}^{n-1} a_j p^j \right| \le p^{-n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$x = \sum_{j=0}^{\infty} a_j p^j$$

כל טור מהצורה $\sum_{j=0}^{\infty} a_j p^j$ כאשר $0 \le a_j < p$.
מתכנס ב- $\mathbb{Q}_p$, ולמעשה ב- $\mathbb{Z}_p$.
כי $a_j p^j \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$ (כי $|a_j|$ חסום: $|a_j| = \begin{cases} 0 & a_j = 0 \\ 1 & 0 < a_j < p \end{cases}$)

הסכומים החלקיים: $S_n = \sum_{j=0}^{n} a_j p^j \in \mathbb{Z}_p$
$\mathbb{Z}_p$ סגור ולכן $\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{j=0}^{\infty} a_j p^j \in \mathbb{Z}_p$.

נשים לב: $\sum_{j=n}^{\infty} a_j p^j \in p^n \mathbb{Z}_p$.

$$p^n (a_n + a_{n+1} p + a_{n+2} p^2 + \cdots) \in p^n \mathbb{Z}_p$$

לכן אם $x = \sum_{j=0}^{\infty} a_j p^j$ (כנ"ל) אז $x - \sum_{j=0}^{n-1} a_j p^j \in p^n \mathbb{Z}_p$.

אם $x = \sum_{j=0}^{\infty} a_j p^j = \sum_{j=0}^{\infty} b_j p^j$ ונסמן $x = \{l_n + p^n \mathbb{Z}\}_{n \ge 1}$ כנ"ל.

$$l_n \equiv \sum_{j=0}^{n-1} a_j p^j \equiv \sum_{j=0}^{n-1} b_j p^j \pmod{p^n}$$

$\Leftarrow$ מכאן באינדוקציה $a_j = b_j$ $\forall j$.

<u>מסקנה:</u> $p^n \mathbb{Z}_p = \left\{ \sum_{j=n}^{\infty} a_j p^j \mid 0 \le a_j < p \right\}$

$$\mathbb{Z}_p^* = \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} a_j p^j \mid 0 \le a_j < p \quad a_0 \ne 0 \right\}$$

$$\mathbb{Z}_p \ni x = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots = a_0 + p(a_1 + a_2 p + \cdots) \in a_0 + p\mathbb{Z}_p$$

$x \in \mathbb{Z}_p$ הפיך $\iff x \notin p\mathbb{Z}_p \iff a_0 \notin p\mathbb{Z}_p \iff p \nmid a_0 \iff a_0 \ne 0$.

<u>מסקנה:</u> לכל $x \in \mathbb{Q}_p$ יש הצגה יחידה בצורה $x = \sum_{j=-k}^{\infty} a_j p^j$ $0 \le a_j < p$
וגם $a_{-k} \ne 0 \iff |x| = p^k$

<u>קידוד:</u> נניח כי $0 \ne x \in \mathbb{Q}_p$ נסמן $x = p^l u$ ($u \in \mathbb{Z}_p^*$, $l \in \mathbb{Z}$).
נסמן $u = \sum_{j=0}^{\infty} a_j p^j$ בייצוג ה p-אדי ($a_0 \ne 0$).

$$x = \sum_{j=0}^{\infty} a_j p^{j+l} = a_0 p^l + a_1 p^{l+1} + a_2 p^{l+2} + \cdots$$

$$|x| = p^{-l}$$

__יחידות:__ $\sum_{j=-k}^{\infty} a_j p^j = \sum_{j=-l}^{\infty} b_j p^j$, $0 \le a_j, b_j < p$, $a_{-k}, b_{-l} \neq 0$,

$$p^{-k}(\underset{\neq 0}{a_{-k}} + a_{-k+1}p + \dots) = p^{-l}(\underset{\neq 0}{b_{-l}} + b_{-l+1}p + b_{-l+2}p^2 + \dots)$$

ניקח ערכים מוחלטים: $p^k \cdot 1 = p^l \cdot 1 \Rightarrow k = l$;

ונצמצם ב p^{-k}: $a_{-k} + a_{-k+1}p + a_{-k+2}p^2 + \dots = b_{-k} + b_{-k+1}p + \dots$

והיחידות שהוכחנו ב- $\mathbb{Z}_p$: $a_j = b_j$ $\forall j$.

לכן ניתן לרשום מספר p-אדי בצורה "עשרונית":

$$\sum_{n=-k}^{\infty} a_n p^n = \dots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \dots a_{-k+1} a_{-k}$$

__דוגמא:__ ייצוג של $-\frac{2}{3}$ ב- $\mathbb{Q}_5$:

חיפשנו מציגים לעזרה:

$$-\frac{2}{3} = 1 + 3\cdot 5 + \left(-\frac{2}{3}\right)5^2$$

לכן: $-\frac{2}{3} = 1 + 3\cdot 5 + 5^2 + 3\cdot 5^3 + 5^4 + \dots$

זה "ייצוג עשרוני" $\dots 3131313131$

בדיקה:

$$-\frac{2}{3} = (1 + 5^2 + 5^4 + \dots) + 5\cdot 3(1 + 5^2 + 5^4 + \dots) =$$
$$= 16(1 + 5^2 + 5^4 + \dots) = 16 \cdot \frac{1}{1 - 5^2} = -\frac{2}{3} \checkmark$$

משוואות p-אדיות

$$\left(\mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \right)$$

נתונה סדרה של קבוצות סופיות לא ריקות $D_1, D_2, \dots$ והעתקות:

$$\dots \longrightarrow D_{n+1} \xrightarrow{j_{n+1}} D_n \xrightarrow{j_n} \dots \longrightarrow D_3 \xrightarrow{j_3} D_2 \xrightarrow{j_2} D_1$$

נסמן: $D = \{ \{d_n\}_{n=1}^{\infty} \mid \forall n \ d_n \in D_n \ \ j_{n+1}(d_{n+1}) = d_n \}$

__טענה:__ D אינה ריקה.

<u>הוכחה</u>: אם כל הפונקציות j_n הן על, אז די להראות כי
$D \neq \emptyset$ כי נבחר $d_1 \in D_1$, כיוון ש j_2 על נבחר לו
מקור $d_2 \in D_2$. אם בחרנו $d_1, \dots, d_n$ נבחר ל-d_n מקור
d_{n+1} ב-D_{n+1} (כי j_{n+1} על). כך נקבל באינדוקציה
$\{d_n\}_{n\geq 1}$ וברור כי היא ב-D.

ואם j_n אינה על.

לכל n קבוע נתבונן ב:

$$D_{n+k} \xrightarrow{j_{n+k}} \cdots \longrightarrow D_{n+1} \xrightarrow{j_{n+1}} D_n$$

לכל $k \geq 1$ נסמן:

$$j_{n,k} = j_{n+1} \circ j_{n+2} \circ \cdots \circ j_{n+k} : D_{n+k} \longrightarrow D_n$$

נסמן
$$j_{n,k}(D_{n+k}) = \underset{\substack{\not\parallel \\ \emptyset}}{D_{n,k}} \subseteq D_n$$

נשים לב כי $D_{n,k+1} \subseteq D_{n,k}$

לכן $\{D_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$ היא סדרה יורדת של תת־קבוצות לא ריקות של D_n
שהן סופיות. לכן סדרה זאת מתייצבת, כלומר יש k_n
כך שלכל $k \geq k_n$
$$D_{n,k} = D_{n,k_n} = \bigcap_{k=1}^{\infty} D_{n,k} \underset{\text{נסמן}}{:=} E_n$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & D_{n+1} \arrow[r, "j_{n+1}"] & \cdots \arrow[r] & D_2 \arrow[r, "j_2"] & D_1 \\
\cdots \arrow[r] & E_{n+1} \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r, "j_{n+1}"] & \cdots \arrow[r] & E_2 \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r, "j_2"] & E_1 \arrow[u, phantom, "\cup"]
\end{tikzcd}$$

נותר להראות כי $j_{n+1}(E_{n+1}) = E_n$ לכל n

$$\begin{array}{ccc}
j_{n+1}(E_{n+1}) & = & E_n \\
\parallel & & \parallel \\
j_{n+1}(D_{n+1,k}) & = & D_{n,k+1} \\
\parallel & & \parallel \\
j_{n+1} \circ j_{n+2} \circ \cdots \circ j_{n+1+k}(D_{n+1+k}) & & j_{n+1} \circ j_{n+2} \circ \cdots \circ j_{n+k+1}(D_{n+k+1})
\end{array}$$

סימון:
$$D = \varprojlim D_n$$