

12.4.10

6 יור

הערה: $\mathbb{Z}_p \setminus \{0\} \cong \mathbb{Z}_p^*$: $\mathbb{Z}_p$ הוא רינג, $\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ הוא גרופה
 @ $\mathbb{Z}_p$: $x \neq 0$ הוא יחידה, כל $x \in \mathbb{Z}_p$ שמתחלק ב- p הוא 0.

@ $\mathbb{Z}_p$: $x \neq 0$ יש גזגז יחידה ב- $\mathbb{Z}_p$: $x = p^n u$ כאשר $u \in \mathbb{Z}_p^*$!

הוכחה: @ נטו : $x \notin \ker \varepsilon$, $x \notin \text{Im}(l_p)$: נבחר $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty$
 נאמר $x_1 \in \mathbb{Z}_p \setminus p\mathbb{Z}_p$: $x_1 \neq 0$: נבחר $(\phi_k(x_k) = x_{k+1})$ כיוון $\forall n \geq 1, x_n \notin pA_n$

נאמר $(\forall n, \phi^{(n)}(x_n) = x_1)$ $\phi^{(n)} = \phi_1 \circ \phi_2 \circ \dots \circ \phi_n$
 $\ker \phi^{(n)} = pA_n$: כן, $\phi^{(n)} : A_n \rightarrow A_1$
 $A_1 \rightarrow (y_1)$: $x_1 \neq 0$: $\phi^{(n)}(y_n) = y_1$: $y_n \in A_n$: $\phi^{(n)}(x_n y_n) = x_1 y_1 = 1$

$\Rightarrow x_n y_n - 1 \in \ker \phi^{(n)} = pA_n$
 $z_n \in A_n$: $x_n y_n = 1 - pz_n$: נבחר

$(1 - pz_n)(1 + pz_n + p^2 z_n^2 + \dots + p^{n-1} z_n^{n-1}) = 1 - p^n z_n^n = 1 \quad (z_n^n \in A_n)$
 $\Rightarrow x_n y_n (1 + pz_n + p^2 z_n^2 + \dots + p^{n-1} z_n^{n-1}) = 1$

$(A_n \text{ בו } x_n \text{ גורם } w_n) \quad x_n w_n = 1$

נאמר $w = \{w_n\}_{n=1}^\infty$: כיוון ϕ_n : $w_n = \phi_n(w_n) = w_{n+1} \Leftarrow \phi_n(x_n) = x_{n+1}$
 $xw = 1$; $w \in \mathbb{Z}_p$: $\phi_n(w_n) = w_{n+1} \Leftarrow \phi_n(x_n) = x_{n+1}$
 כיוון ההוכחה :

$xw = 1$: $w \in \mathbb{Z}_p$: $x \in \mathbb{Z}_p$: $x \notin \text{Im}(l_p) \Leftarrow x \in \ker \varepsilon \Leftarrow x_1 \neq 0$
 נאמר $xw = 1$: $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty$, $w = \{w_n\}_{n=1}^\infty$
 $x \notin \text{Im}(l_p) \Leftarrow x \in \ker \varepsilon \Leftarrow x_1 \neq 0$

$$\boxed{|\mathbb{Z}_p^* = \mathbb{Z}_p \setminus p\mathbb{Z}_p|} \quad \Leftarrow \quad \text{Im}(l_p) = p\mathbb{Z}_p$$

② נניח כי $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $0 \neq x \in Z_p$ כיוון שלא כל הקואורדינטות הן אפס, אז נבחר $n \neq 1$ כדליוסון

כך $x_{n+1} \neq 0$ (באופן כללי $x_1=0, \dots, x_n=0$)

$$x_n=0 \Leftrightarrow \sum_n(x)=0 \Leftrightarrow x \in \ker \sum_n = \text{Im}(\ell_{p^n})$$

לכן יש $u \in Z_p$ כך ש $x = \ell_{p^n}(u) = p^n u$

אם הדין, כי אחרת לכל (u) הוא במעמד של ℓ_p

$$\sum_{n+1}(x)=0 \Leftrightarrow x=p^{n+1}v \quad v \in Z_p$$

במקרה אחרת u

יחידות! נניח $x = p^{n_1}u_1 = p^{n_2}u_2$ כאשר n_1, n_2 שלמים,

$u_1, u_2 \in Z_p^*$ נניח ונשלב, לכל $n_1 > n_2$

$$p^{n_2} p^{n_1-n_2} u_1 = p^{n_2} u_2$$

$$\ell_{p^{n_2}}(p^{n_1-n_2} u_1) = \ell_{p^{n_2}}(u_2)$$

$$p^{n_1-n_2} u_1 = u_2 \quad \text{מחרוזת } \ell_{p^{n_2}}$$

ובינן u_2 הדין, נקבל (1) כי $n_1 - n_2 = 0$ סתירה

$$\text{לכן } n_1 = n_2 \quad \text{לכן } u_1 = u_2 \quad \text{לכן } \ell_{p^{n_1}}(u_1) = \ell_{p^{n_2}}(u_2) = p^{n_1}u_1 = p^{n_2}u_2$$

סקיננה: Z_p הוא תחום שלמות (לפי מחרוזת אפס)

הוכחה: נניח כי $0 \neq x, y \in Z_p$ נבחר: $x = p^{n_1}u_1$, $y = p^{n_2}u_2$

כאשר $u_1, u_2 \in Z_p^*$, נבחר n_1, n_2 שלמים

$$xy = p^{n_1+n_2} u_1 u_2 = \ell_{p^{n_1+n_2}}(u_1 u_2)$$

$u_1 u_2 \neq 0$ הדין, ובנוסף

$$xy = \ell_{p^{n_1+n_2}}(u_1 u_2) \neq 0$$

המשקל הוא מחרוזת מחרוזת ולכן

סקיננה: Z_p הוא תחום שלמות. יתר על כן, כל מחרוזת, שונה מאפס, נוצר ע"י הנקבה של p , כלומר מחרוזת $p^n Z_p$

נניח כי $I \subseteq Z_p$, $I \neq 0$ מחרוזת

כל מחרוזת שונה מאפס $I \neq 0$ הוא מחרוזת $p^n u$ כאשר $u \in Z_p^*$

$$p^n = u^{-1}(p^n u) \in I$$

יהי p^n כלבד' הקטן ביותר כן $p^n \in I$

$$I \text{ מחרוזת } \Leftrightarrow p^n Z_p \subseteq I$$

לדין, אם $x \in I$, $x \neq 0$ נכתוב $x = p^n u$ כאשר $p^n \in I$

$$x = p^n (p^{n-n} u) \in p^n Z_p$$

$$I \subseteq p^{n_0} \mathbb{Z}_p \text{ where}$$

$$\mathbb{Z}_p \supsetneq p \mathbb{Z}_p \supsetneq p^2 \mathbb{Z}_p \supsetneq \dots \supsetneq p^n \mathbb{Z}_p \supsetneq \dots$$

$$a \in \mathbb{Z}_p^* \text{ is a unit in } \mathbb{Z}_p \text{ (invertible element)}$$

$$\forall n \quad a_{n+1} \equiv a_n \pmod{p^n}, \quad a = \{a_n + p^n \mathbb{Z}\}_{n=1}^{\infty}$$

$$\mathbb{Z}_p^* = \{b_n + p^n \mathbb{Z}\}_{n=1}^{\infty} \text{ where } a \in \mathbb{Z}_p^* \Leftrightarrow a_1 \not\equiv 0 \pmod{p}$$

$$a_1 b_1 \equiv 1 \pmod{p} \text{ i.e. } \exists b_1 \in \mathbb{Z} \text{ such that } a \text{ is invertible}$$

$$b_2 = b_1 + k_2 p \text{ i.e. } b_2 \equiv b_1 \pmod{p}$$

$$a_2 = a_1 + r_2 p \quad a_2 \equiv a_1 \pmod{p}$$

$$a_2 b_2 \equiv 1 \pmod{p^2} \text{ i.e.}$$

$$(a_1 + r_2 p)(b_1 + k_2 p) \equiv 1 \pmod{p^2}$$

$$a_1 b_1 + a_1 k_2 p + r_2 b_1 p \equiv 1 \pmod{p^2}$$

$$a_1 b_1 = 1 + l_2 p \text{ i.e.}$$

$$l_2 p + a_1 k_2 p + r_2 b_1 p \equiv 0 \pmod{p^2}$$

$$l_2 + a_1 k_2 + r_2 b_1 \equiv 0 \pmod{p}$$

$$a_1 k_2 \equiv -l_2 - r_2 b_1 \pmod{p}$$

$$k_2 \equiv b_1 (-l_2 - r_2 b_1)$$

$$\text{i.e. } \exists b_1, b_2, \dots, b_{n-1} \text{ such that}$$

$$i=1, \dots, n-2 \quad \begin{cases} b_{i+1} \equiv b_i \pmod{p^i} \\ a_i b_i \equiv 1 \pmod{p^i} \end{cases}$$

$$p^i \nmid r_{i+1} \text{ i.e. } b_n \text{ is invertible}$$

$$b_n = b_{n-1} + k_n p^{n-1}$$

$$a_n = a_{n-1} + r_n p^{n-1} \text{ i.e.}$$

$$a_{n-1} b_{n-1} = 1 + l_n p^{n-1}$$

$$a_n b_n \equiv 1 \pmod{p^n} \text{ i.e.}$$

$$(a_{n-1} + r_n p^{n-1})(b_{n-1} + k_n p^{n-1}) \equiv 1 \pmod{p^n}$$

$$1 + l_n p^{n-1} + a_{n-1} k_n p^{n-1} + r_n p^{n-1} \equiv 1 \pmod{p^n}$$

$$k_n = -b_{n-1} (l_n + r_n b_{n-1}) \pmod{p}$$

ערה חשובה Z_p מקבלת ערך הסתברותי p -פולימי. Q_p $1/n$

1234

a, b $\in \mathbb{R}$ new $(a, b), (X)$ nicht $\in \mathbb{S}$ nicht plan

$$(1) \quad a_1 b_2 = a_2 b_1 \Leftrightarrow (a_1, b_1) \sim (a_2, b_2)$$

[illegible]

$$a_1 \cancel{b_2} b_3 = a_3 \cancel{b_2} b_1 \quad (b_2 \neq 0)$$

(a, b) se mifor mifon me $[a, b]$, por

2C. 11732W 11738W

$$(a_1 b_2 + a_2 b_1) \beta_1 \beta_2 = (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) b_1 b_2$$

$$= \alpha_1 b_1 + b_2 \beta_2 + \alpha_2 b_2 \quad b_1 \beta_1 = (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) b_1 b_2$$

$$\bar{a}_1 a_2 \bar{\beta}_1 \beta_2 = \bar{a}_1 \alpha_2 \bar{\beta}_1 \beta_2 : \bar{1}^3 \beta_{02}$$

מלכות אלה ב' גבולות ובהם גבולות המלכות, והוא שיהיה שם המלכות.

$[0, 1]$: 001000

[1, 1] : תאריך

Q_R ist über R , Q_R ist separabel über R

$$r \mapsto [r, 1] \quad \checkmark$$

$$_i [r_1, 1] \cdot [r_2, 1] = [r_2, r_2, 1], \quad [r_1, 1] + [r_2, 1] = [r_2 + r_2, 1], \quad (r_1, 1) \sim (r_2, 1) \Rightarrow r_1 = r_2$$

$$[a, b] = [a, 1] \cdot [1, b] = [a, 1] [b, 1]^{-1} = a b^{-1} = \frac{a}{b}$$

$$\mathbb{Q}_p \ni \frac{p^{n_1} u_1}{p^{n_2} u_2} = p^{n_1 - n_2} \underbrace{u_1 u_2^{-1}}_{\in \mathbb{Z}_p^*}$$

לפי, $\mathbb{Q}_p$ הוא שדה, $0 \neq 1$, $p^n u$ כאשר $n \in \mathbb{Z}$, $u \in \mathbb{Z}_p^*$.
 הבה נראה ש: $p^{n_1} u_1 = p^{n_2} u_2$ כאשר $n_1 \leq n_2$, אז $u_1 = p^{n_2 - n_1} u_2$.
 נראה ש: $u_1 = p^{n_2 - n_1} u_2$ כאשר $n_2 - n_1 = 0$, $u_1 = u_2$.
 נראה ש: $u_1 = p^{n_2 - n_1} u_2$ כאשר $n_2 - n_1 > 0$.

$$\dots \not\subset p^{-3} \mathbb{Z}_p \not\subset p^{-2} \mathbb{Z}_p \not\subset p^{-1} \mathbb{Z}_p \not\subset \mathbb{Z}_p \not\subset p \mathbb{Z}_p \not\subset p^2 \mathbb{Z}_p \not\subset \dots$$

נגדיר $v_p: \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ כדלקמן:
 $x = p^n u$, $u \in \mathbb{Z}_p^*$, $x \neq 0$, אז $v_p(x) = n$.
 $v_p(0) = \infty$.

v_p (הערך) (p-adic valuation) $v_p(x) = n$
 $v_p(0) = \infty$
 נגדיר $| \cdot |_p: \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{R}^+$ (הערך) (p-adic absolute value)
 $|0|_p = 0$
 $|x|_p = p^{-v_p(x)}$ כאשר $x \neq 0$
 $|p^n u|_p = p^{-n}$

לדבר

$$x=0 \Leftrightarrow |x|_p=0 \quad \forall x \in \mathbb{Q}_p \quad |x|_p \geq 0 \quad (1)$$

$$x, y \in \mathbb{Q}_p \quad |x \cdot y|_p = |x|_p \cdot |y|_p \quad (2)$$

$$\forall x, y \in \mathbb{Q}_p \quad |x+y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\} \quad (3)$$

$$\text{כל } x, y \in \mathbb{Q}_p \text{ שבהם } |x|_p \neq |y|_p \text{ אז } |x+y|_p = \max\{|x|_p, |y|_p\} \quad (4)$$

הוכחה

(1) ברור מההגדרה.

(2) $xy=0$ אז $x=0$ או $y=0$.
 נניח $x \neq 0$, אז $y=0$.
 נניח $y \neq 0$, אז $x=0$.
 נניח $x, y \neq 0$, אז $|x|_p, |y|_p > 0$.
 נניח $|x|_p = p^{-n}$, $|y|_p = p^{-m}$.
 אז $|x \cdot y|_p = p^{-(n+m)} = p^{-n} \cdot p^{-m} = |x|_p \cdot |y|_p$.

נניח $x, y \neq 0$, אז $x = p^{n_1} u_1$, $y = p^{n_2} u_2$, $u_1, u_2 \in \mathbb{Z}_p^*$

כאשר $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, $u_1, u_2 \in \mathbb{Z}_p^*$

$$xy = p^{n_1+n_2} \underbrace{u_1 u_2}_{\in \mathbb{Z}_p^*}$$

$$\Rightarrow |xy|_p = p^{-n_1-n_2} = p^{-n_1} p^{-n_2} = |x|_p |y|_p.$$

(3) נניח $x=0$ או $y=0$. אז (3) מתקן.

לכן נניח $x, y \neq 0$, נבחר n_1, n_2 כך ש-

נניח $n_1 > n_2$ (במקרה הנגדי נחליף את x ו- y).

$$x+y = p^{n_2} \left(\underbrace{p^{n_1-n_2} u_1}_{\in \mathbb{Z}_p^*} + \underbrace{u_2}_{\in \mathbb{Z}_p^*} \right)$$

נשים לב כי $u_2 + p^{n_1-n_2} u_1 \in \mathbb{Z}_p^*$ כי $u_2 \in \mathbb{Z}_p^*$ ו- $p^{n_1-n_2} u_1 \in p \mathbb{Z}_p$.

לכן $u_2 + p^{n_1-n_2} u_1 \in \mathbb{Z}_p^*$ ו- $u_2 \in \mathbb{Z}_p^*$ אז $u_2 + p^{n_1-n_2} u_1 \in \mathbb{Z}_p^*$.

$$|x+y|_p = p^{-n_2} \Leftrightarrow w \in \mathbb{Z}_p^* \text{ כזה ש- } x+y = p^{n_2} w$$

$$\Rightarrow |x+y|_p = \max \{p^{-n_1}, p^{-n_2}\} = \max \{|x|_p, |y|_p\}.$$

$$x+y = p^{n_2} \left(\underbrace{u_1 + u_2}_{\in \mathbb{Z}_p^*} \right) : n_1 = n_2$$

$$x+y=0 \Leftrightarrow u_1+u_2=0$$

$$(\forall v \in \mathbb{Z}_p^*, r \geq 0) \quad u_1+u_2 = p^r v \quad \text{אז } u_1+u_2 \neq 0$$

$$|x+y|_p = \begin{cases} 0 \\ p^{n_2-r} \end{cases} \leq p^{-n_2} = \max \{|x|_p, |y|_p\}.$$

לכן יש לנו את האי-שוויון המשולש:

$$|x+y|_p \leq \max \{|x|_p, |y|_p\} \leq |x|_p + |y|_p$$

לכן האי-שוויון המשולש מתקן.

$$\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p \mid |x|_p \leq 1\} \quad \text{החוג המקומי המקסימלי}$$

$$p^n \mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p \mid |x|_p \leq p^{-n}\} \quad \text{החוג המקומי המקסימלי}$$

$$\mathbb{Z}_p^* = \{x \in \mathbb{Q}_p \mid |x|_p = 1\} \quad \text{החוג המקומי המקסימלי}$$

① אם $x \in \mathbb{Z}_p$, $x \neq 0$, נכתוב $x = p^n u$, כאשר $u \in \mathbb{Z}_p^*$, $0 \leq n \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow |x|_p = p^{-n} \leq 1$$

לפיכך, אם $|x|_p \leq 1$, $x \in \mathbb{Q}_p$, $x \neq 0$, אז $x = p^n u$, $u \in \mathbb{Z}_p^*$, $n \in \mathbb{Z}$

$$|x|_p = p^{-n} \leq 1 \Rightarrow -n \leq 0 \Rightarrow n \geq 0 \Rightarrow x = p^n u \in \mathbb{Z}_p$$

דוגמה: נאמר כי סדרה $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ ב- $\mathbb{Q}_p$ מתכנסת ל- $a \in \mathbb{Q}_p$.
אם קיים

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |t_n - a|_p = 0$$

גורמת בהמשך $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = a$

(הערה: אם היה קיים, אז הוא יחיד, כי אם היה עוד סדרה $\{s_n\}$ שגורמת

$$|b - a|_p = |b - t_n - (a - t_n)|_p \leq |b - t_n|_p + |a - t_n|_p =$$

$$= |t_n - b|_p + |t_n - a|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \neq 0$$

$$\Rightarrow |b - a|_p \leq 0 \Rightarrow |b - a|_p = 0 \Rightarrow b = a$$

חוקי הגבול - כוונות

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = b$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (t_n + z_n) = a + b$$

ג, סדרה מתכנסת היא חסומה.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n z_n = a b$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |t_n|_p = |a|_p$$

ה, אם $b \neq 0$, אז

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n}{z_n} = \frac{a}{b}$$

משקנה: אם $f(x) \in \mathbb{Q}_p[x]$ אז $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ ב- $(\mathbb{Q}_p, \cdot)$

$$f(t_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(a)$$

לעומת: אם סדרה ב- $\mathbb{Z}_p$ מתכנסת אז היא מתכנסת ל- 0 ב- $\mathbb{Z}_p$.

קובץ: $\{x(n)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה ב- Z_p

בסדרה $\varepsilon_j: Z_p \rightarrow A_j$ נגדן נקראוויטלר ה- j

על ידי Z_p ושל יסוד בסדרה $\prod_{k=1}^{\infty} A_k$ כיון A_1 סדר (בד"ק מוגדרת) יש $a_1 \in A_1$ כך ש-
 $\{n \mid \varepsilon_1(x(n)) = a_1\}$ אינסופית.

היה $\{x^1(n)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מוגדרת על $\{x(n)\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש-
 $\varepsilon_1(x^1(n)) = a_1 \quad \forall n \geq 1$

באותו מילן כיון A_2 סדרת, יש $a_2 \in A_2$ וסדרה מוגדרת
 $\forall n \geq 1 \quad \varepsilon_2(x^2(n)) = a_2$ כך ש- $\{x^2(n)\}_{n=1}^{\infty} \supseteq \{x^1(n)\}_{n=1}^{\infty}$
 כך נמשך שרשרת של סדרות חתומות:

$\{x(n)\}_{n=1}^{\infty} \supseteq \{x^1(n)\}_{n=1}^{\infty} \supseteq \{x^2(n)\}_{n=1}^{\infty} \supseteq \dots$
 וכן $a_j \in A_j$ כך ש- $\varepsilon_j(x^j(n)) = a_j$ לכל $1 \leq n$
 נגדו $a = \{a_j\}_{j=1}^{\infty} \in Z_p$, $a \in Z_p$ ושל $\varepsilon_k(x^k(a)) = a_k$

לכאן, נראה כי סדרה $\{x^j(n)\}_{j=1}^{\infty}$ מתכנסת ל- a .

$$\varepsilon_j(x^j(a)) = a_j = \varepsilon_j(a)$$

$$x^j(a) - a \in \ker(\varepsilon_j) = \text{Im}(\theta_{p^j})$$

$$x^j(a) - a \in p^j Z_p$$

$$|x^j(a) - a|_p \leq p^{-j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$$

לכן $\mathbb{Q}_p$ סדרה חתומה יש סדרה מוגדרת