

8.3.10

3 יורע

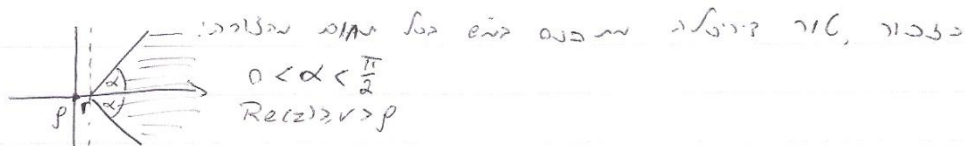
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z} \quad \text{משפט: נניח כי } f \text{ זריקה}$$

ישו: $\operatorname{Re}(z) > p$ $\forall n, a_n = 0 \iff f \equiv 0$

הוכחה: נניח כי $f \equiv 0$ (כלומר $\forall n, a_n = 0$)

$$0 = e^{\lambda_0 z} f(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{(\lambda_0 - \lambda_n)z}$$

$\forall n \geq 1, \lambda_0 - \lambda_n < 0$



בנקודה הזו, $z = x + iy$, $x \rightarrow \infty$ וישו $\lambda_0 - \lambda_n < 0$

$$0 = e^{\lambda_0 x} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\lambda_0 x} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{(\lambda_0 - \lambda_n)x})$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lim_{x \rightarrow \infty} e^{(\lambda_0 - \lambda_n)x} = a_0$$

ישו $a_0 = a_1 = \dots = a_{p-1} = 0$ וישו $a_0 = 0$

$$0 = f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$$

$$\Rightarrow 0 = e^{-\lambda_1 z} f(z) = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n e^{(\lambda_1 - \lambda_n)z}$$

ישו $a_1 = 0$ וישו $a_1 = 0$

$$f \neq 0 \iff \int_0^\infty \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(x)}{x^n} dx = \int_0^\infty \frac{f(x)}{x} dx$$

$\forall n, f(x) = f(x+n) = f(x)f(n)$

הנחה, $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = 1 + \dots$,
 וכן $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(p^n)}{p^{ns}} = 1 + \dots$ המכונה $F_p(s)$
 הינה פונקציה ממשית כי S_0 היא אגס, $F(s)$
 $(\text{Re}(s) > 1)$ כיוון e אינה פונקציה ממשית, S_0 היא
 מסדר סופי k מכאן, יש לפחות k מספרים ראשוניים
 $p_1, \dots, p_k$ כך $\varphi_{p_i}(s)$ ממשית S_0 -אגס
 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(p^n)}{p^{ns}} = \varphi_p(s)$

כי אם נהיה בעיליה p_{k+1} יהיו מספרים $p_1, \dots, p_{k+1}$
 (כך $\varphi_{p_i}(s_0) = 0$), אם כן קיזר, S_0 היא אגס מסדר סופי,
 נאמר r_i , $\varphi_{p_i}(s)$

$$r = \sum_{i=1}^{k+1} r_i > k$$

יהי L כך $\{p_1, \dots, p_{k+1}\} \subseteq S_L$ לפי $L \geq r$

$$f_L(s) = \prod_{p \in S_L} \varphi_p(s)$$

בשל אגס S_0 -אגס מסדר $k < r$, $f_L^{(k)}(s) = 0$ לפי $L \leq r$

$$0 = f_L^{(k)}(s_0) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} F^{(k)}(s_0) \neq 0$$

סותר.

$\varphi_p(s)$ ממשית p לפי $L \Rightarrow S_0$ -אגס ממשית $F(s)$ לפי S_0 -אגס ממשית

אם $\lim_{L \rightarrow \infty} \prod_{p \in S_L} \varphi_p(s) = 0$ אז $S \subseteq P$ כי $0 \neq \prod_{p \in P} \varphi_p(s_0)$
 והינה בעיליה ממשית.

$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ is a multiplicative function
 $(\forall m, n \in \mathbb{N} \quad f(mn) = f(m)f(n))$
 $f(p)^n = f(p^n)$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(p^n)}{p^{ns}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{f(p)}{p^s} \right)^n$$

$|f(n)| \leq A \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{so} \quad |f(n)| \leq 1 \quad \text{if } n \text{ is prime}$
 $\forall k \quad |f(n^k)| \leq A \quad \text{if } n \text{ is prime}$
 $|f(n)|^k \leq A$
 $|f(n)| \leq \sqrt[k]{A} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(p)}{p^s} \right| = \left| \frac{f(p)}{p^{\operatorname{Re}(s)}} \right| \leq \frac{1}{p^{\operatorname{Re}(s)}} < \frac{1}{p} < 1 \quad \text{if } \operatorname{Re}(s) > 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{f(p)}{p^s} \right)^n = \frac{1}{1 - f(p)p^{-s}}$$

$(\text{if } \operatorname{Re}(s) > 1)$
 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - f(p)p^{-s})^{-1}$

$f = 1$: the case of the Riemann zeta function

$(\operatorname{Re}(s) > 1) \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - p^{-s})^{-1}$

$\forall \operatorname{Re}(s) > 1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \neq 0 \quad \text{so} \quad \forall p \in \mathbb{P} \quad (1 - p^{-s})^{-1} \neq 0$

The function $\zeta(s)$ is meromorphic in the complex plane.
 $(\zeta(s) \rightarrow \infty \text{ as } s \rightarrow 1)$, $\operatorname{Re}(s) > 0$
 $\operatorname{Re}(s) > 0$ is the region of convergence.
 $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \phi(s)$, $(\operatorname{Re}(s) > 0)$ where $\phi(s)$ is analytic.

The integral representation of $\zeta(s)$ for $\operatorname{Re}(s) > 1$:
 $\int_1^{\infty} t^{-s} dt = \frac{1}{s-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} t^{-s} dt$

$(\operatorname{Re}(s) > 1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} t^{-s} dt =$

$$= \frac{1}{s-1} + \sum_{n=2}^{\infty} \int_n^{n+1} \underbrace{\left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{t^s} \right)}_{\phi_n(s)} dt$$

הערות: $\phi_n(s)$ היא פונקציה של s ו- n .
 עבור $e^{\sigma} > 1$, $\operatorname{Re}(s) > 0$ נקבל $\sum_{n=2}^{\infty} \phi_n(s)$ מתכנס.

$$|\phi_n(s)| \leq \max_{n \leq t \leq n+1} \left| \frac{1}{n^s} - \frac{1}{t^s} \right| = \max_{n \leq t \leq n+1} |e^{-(\log n)s} - e^{-(\log t)s}|$$

$$\leq \max_{n \leq t \leq n+1} \frac{|s|}{\operatorname{Re}(s)} (e^{-(\log n)\operatorname{Re}(s)} - e^{-(\log t)\operatorname{Re}(s)}) =$$

$$= \max_{n \leq t \leq n+1} \frac{|s|}{\operatorname{Re}(s)} (n^{-\operatorname{Re}(s)} - t^{-\operatorname{Re}(s)}) =$$

$$= \max_{n \leq t \leq n+1} \frac{|s|}{\operatorname{Re}(s)} (-\operatorname{Re}(s)) \xi^{-\operatorname{Re}(s)-1} (n-t) =$$

$$= \max_{n \leq t \leq n+1} \frac{|s| (t-n)}{\xi^{\operatorname{Re}(s)+1}} \leq \frac{|s|}{n^{\operatorname{Re}(s)+1}}$$

$\sum_{n=2}^{\infty} \phi_n(s)$ מתכנס עבור $\operatorname{Re}(s) > 0$ ויש $|\phi_n(s)| \leq \frac{|s|}{n^{\operatorname{Re}(s)+1}}$ וזה מתכנס.
 עבור $e^{\sigma} > 1$, $\operatorname{Re}(s) > 0$ נקבל $\sum_{n=2}^{\infty} \phi_n(s)$ מתכנס.

עבור $\operatorname{Re}(s) > 0$ נקבל $\sum_{n=2}^{\infty} \phi_n(s) = \zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ וזהו $\zeta(s)$.

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} (1 - p^{-s})^{-1}$$

$$\Rightarrow \log \zeta(s) = \sum_{p \in \mathcal{P}} -\log(1 - p^{-s}) = \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n p^{ns}} =$$

$$= \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p^s} + \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n p^{ns}}$$

הערות: $\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p^s} \sim \log \frac{1}{s-1}$ עבור $s \rightarrow 1$.

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p^s} \sim \log \frac{1}{s-1} \text{ עבור } s \rightarrow 1$$

עבור

$$\lim_{\substack{s \rightarrow 1 \\ \operatorname{Re}(s) > 0}} \frac{\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p^s}}{\log \left(\frac{1}{s-1} \right)} = 1$$

עבור $\operatorname{Re}(s) > 0$ נקבל $\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p^s} \sim \log \frac{1}{s-1}$.

זכרון: יעשה אדם כיון שיהיה נשכח

So for any s , $\|s\|$ is not ≤ 1 $\forall s$ i.e., $\forall s$

$$[\operatorname{Re}(s) > 1 \rightarrow \log \zeta(s)]$$

המשפט: $\log((1-p)^{-1}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^k}{k}$

$$|p^{-s}| \geq 1 \quad \text{für } 1 \leq p^{-s} \quad \text{und} \quad \frac{1}{1-p^{-s}} \leq 0 \quad \text{für } s > 0$$

Recs) 50 511

$\log(z^{-1}) = -\log(z)$ and so we get

$$\text{Log}((1-p^{-s})^{-1}) = -\text{Log}(1-\underbrace{p^{-s}}_{\infty})$$

$$|z| < 1 \quad \text{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$$

$$\text{Recs} > 1 \Rightarrow -\log(1-p^{-s}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n p^{ns}}$$

$$(Re s) > 1 \quad \zeta(s) \sim \sum_{\rho \in \rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \rho^n} \quad \text{סדרה גאומטרית}$$

$$x = \text{Recs}) \quad \frac{1}{n p^{x_n}} \leq \frac{1}{p^{n x}} = \left(\frac{1}{p^x}\right)^n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n p^{nx}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} (p^{-x})^n = \frac{1}{p^x} \frac{1}{1-p^{-x}} = \frac{1}{p^x - 1} \leq \frac{2}{p^x}$$

$$1 \leq x \leq \infty \Rightarrow \sum_{p \in P} \frac{1}{p^x} > 1/2$$

הכנסת - חשבון הכנסות ופיקודים

$\text{Re}(s) > 1$ $\frac{1}{s-1}$ $\frac{1}{s}$ $e^{\lambda t}$ t^n

$$\log(\zeta(s)) \stackrel{1.70}{=} g(s) = \sum_{p \in P} \log(1 - p^{-s})^{-1}$$

$$e^{g(s)} = e^{\sum_{p \in P} \log((1-p^{-s})^{-1})} = \prod_{p \in P} e^{\log((1-p^{-s})^{-1})} =$$

$$= \prod_{p \in P} (1 - p^{-s})^{-1} = \zeta(s)$$

[illegible]

נכונות $\psi(s)$: נראה, $\psi(s) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n p^n s}$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{p^{nx}} = \frac{1}{p^{2x}} + \frac{1}{p^{3x}} + \dots = \frac{1}{p^{2x}} \frac{1}{1-p^{-x}} = \frac{1}{p^x(p^x-1)} \quad \frac{1}{n p^{nx}} \leq \frac{1}{p^{nx}}$$

$$|\psi(s)| \leq \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^x(p^x-1)} < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^x(n^x-1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{2x}(1-\frac{1}{n^x})} < \infty \quad x > \frac{1}{2}$$

לפי $\psi(s)$ נכונות $\Re(s) > \frac{1}{2}$ נראה שזהו שדה

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^s} = \log \zeta(s) - \psi(s) = \log\left(\frac{1}{s-1} + \phi(s)\right) - \psi(s) =$$

$$= \log\left[\frac{1}{s-1} (1 + (s-1)\phi(s))\right] - \psi(s) =$$

$$= \log \frac{1}{s-1} + \log(1 + (s-1)\phi(s)) - \psi(s)$$

$$\Rightarrow \frac{\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^s}}{\log \frac{1}{s-1}} = 1 + \frac{\log(1 + (s-1)\phi(s)) - \psi(s)}{\log \frac{1}{s-1}} \xrightarrow[\Re(s) > 1]{s \rightarrow 1} 1$$

כי במארגי השדה הראשון מסוים בקרבת $s=1$ והשני שואף ל- ∞

כונתיות - L של קבוצה

$$\chi(n) = \begin{cases} 0 & (\chi \in \hat{\mathbb{Z}}_m^*) \\ \chi(n+m\mathbb{Z}) & (n,m)=1 \end{cases} \quad \chi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \text{ כונתיות}$$

χ כפונקציה אריתמטית, ולכן קבוצתה של χ היא

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ \Re(s) > 1}} (1 - \chi(p) p^{-s})^{-1}$$

$$(\chi_{n,m}(n)) = \begin{cases} 0 & (n,m) \neq 1 \\ 1 & (n,m)=1 \end{cases} \quad m \text{ קבוצתה של } \chi_{n,m} \text{ (כפונקציה אריתמטית)}$$

$$L(s, \chi_{0,m}) = \sum_{\substack{n=1 \\ (n,m)=1}}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \nmid m} (1 - p^{-s})^{-1} =$$

$$= \prod_{p \nmid m} (1 - p^{-s}) \prod_{p \in P} (1 - p^{-s})^{-1} = \left[\prod_{p \nmid m} (1 - p^{-s}) \right] \zeta(s)$$

לכן $L(s, \chi_{0,m}) = \left[\prod_{p \nmid m} (1 - p^{-s}) \right] \zeta(s)$ ויש להסתכל על ההתנהגות של $\zeta(s)$ ב- $s=1$.

לemma: נניח $\chi \neq \chi_{0,m}$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$ מתכנס ב- $s=1$ ופונקציה אנליטית ב- $s=1$.

הוכחה: נראה כי הסדרה $A_{n,v} = \sum_{h=0}^v \chi(h)$ מתכנסת.

אם $v = m-1+u$ אז $\{u, u+1, \dots, m-1+u\}$ היא מערכת של מספרים שונים מ- m ולכן $\chi(h) = 0$ לכל h בזה הקטע.

$$A_{n,v} = \sum_{h=u}^{u+m-1} \chi(h) = \sum_{h \in \mathbb{Z}_m^*} \chi(h) = 0$$

$$\left| \sum_{h=u}^v \chi(h) \right| \leq \sum_{h=u}^v |\chi(h)| \leq \sum_{h=u}^{u+m-1} |\chi(h)| = \phi(m) \quad (\text{כפי מילוי})$$

לכן לפי ה-lemma של שיעור קודם $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$ מתכנס.