

1, 3, 10

עיון 2

משפט מרסנר שטגר: יהי a שלם חופשי מריבועים, $m = 4|a|$,
 χ_a חצי קיימ כיכר יחיד, מורחב מ χ_a , כן שלם p ראשוני זר
 $m-1$:

$$\chi_a(p) = \left(\frac{a}{p}\right)$$

$$\chi_a \neq 1, a \neq 1 \Rightarrow \chi_a^2 = 1$$

הכלל למקרה הרגור, (הכלל) χ_a שלם n זר $m-1$ $\chi_a(n) = \left(\frac{a}{n}\right)$ יחיד χ_a

קריטריון: נניח כי $a = p_1 p_2 \dots p_k$ ראשי מלאים (p_j) שונים, $k \geq 1$
 χ_a שלם n זר $m-1$:

$$\chi_a(n) = (-1)^{\frac{a-1}{2}(n-1)} \left(\frac{n}{a}\right)$$

$$(-1)^{\frac{a-1}{2}(n-1)} = (-1)^{\frac{p_1-1}{2}(n-1)} \dots (-1)^{\frac{p_k-1}{2}(n-1)}$$

כל χ_a כיכר מורחב מ χ_a

$\chi_a: \mathbb{Z}_m^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ מורחב מ χ_a שלם n זר $m-1$ $\chi_a(n) = \left(\frac{a}{n}\right)$ יחיד χ_a

$\chi_a(p) = \left(\frac{a}{p}\right)$ מ χ_a שלם n זר $m-1$ $\chi_a(n) = \left(\frac{a}{n}\right)$ יחיד χ_a
 $n \in \mathbb{Z}_m^* \setminus (\mathbb{Z}_{p_i}^*)^2$ $\chi_a(n) = -1$ $\chi_a(n) = 1$ $\chi_a(n) = 1$ $\chi_a(n) = 1$
 $n \equiv 1 \pmod{4 \cdot p_1 \dots p_k}$ $\chi_a(n) = 1$ $\chi_a(n) = 1$ $\chi_a(n) = 1$

$$\chi_a(n) = (-1)^{\frac{a-1}{2}(n-1)} \left(\frac{n}{a}\right) = \left(\frac{n}{a}\right) = \left(\frac{n}{p_1}\right) \left(\frac{n}{p_2 \dots p_k}\right) = \left(\frac{n}{p_1}\right) \left(\frac{n}{p_2 \dots p_k}\right) = -1$$

משפט מרסנר שטגר, $a = 5$ χ_a שלם n זר $m-1$ $\chi_a(n) = \left(\frac{a}{n}\right)$ יחיד χ_a
 $S = \pm 1, \pm 2$

$$\chi_a(n) = \chi_5(n) \chi_S(n)$$

$$\chi_S(n) = \begin{cases} 1 & S = 1 \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} & S = -1 \\ (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} & S = 2 \\ \chi_1(n) \chi_2(n) & S = -2 \end{cases}$$

הפונקציה χ_p היא פונקציה מ- $\mathbb{N}$ ל- $\mathbb{C}$ המוגדרת על ידי:

$$\chi_a(p) = \chi_b(p) \chi_5(p) = \left(\frac{b}{p}\right) \left(\frac{5}{p}\right) = \left(\frac{b \cdot 5}{p}\right) = \left(\frac{5b}{p}\right)$$

אם $a \neq 1$ אז $\chi_a \neq 1$ (כי χ_1 היא הפונקציה הטריוויאלית)

קריטריון

נניח $\lambda_n \rightarrow \infty$ ו- $\{a_n\}$ היא סדרה של מספרים מרוכבים, $z \in \mathbb{C}$ ו- $\forall n, \lambda_n < \lambda_{n+1}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$$

הפונקציה

הפונקציה $\lambda_n = \log n$ (1)

$$e^{-\lambda_n z} = e^{-(\log n)z} = \frac{1}{n^z}$$

הפונקציה הזו היא

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-n z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (e^{-z})^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n \quad n = \lambda_n \quad (2)$$

הפונקציה $f(s)$ היא

הפונקציה $f(s)$ היא פונקציה מרוכבת, $\{b_n\}, \{a_n\}$ הם סדרות מספרים מרוכבים.

$$S_{m,m'} = \sum_{n=m}^{m'} a_n b_n ; \quad A_{m,r} = \sum_{n=m}^r a_n$$

$$S_{m,m'} = \sum_{n=m}^{m'-1} A_{m,n} (b_n - b_{n+1}) + A_{m,m'} b_{m'}$$

$$(S A' b = A b + S A b) \quad \text{הפונקציה } f(s) \text{ היא פונקציה מרוכבת}$$

$S_{m,m'} = 2 \quad 2.3 \quad \text{נסו, } a_n = A_{m,n} - A_{m,n-1} \quad \text{נסו}$

$$S_{m,m'} = \sum_{n=m}^{m'} a_n b_n = a_m b_m + \sum_{n=m+1}^{m'} (A_{m,n} - A_{m,n-1}) b_n$$

$$= a_m b_m + \sum_{n=m+1}^{m'} A_{m,n} b_n - \sum_{n=m+1}^{m'} A_{m,n-1} b_n =$$

$$= a_m b_m - A_{m,m} b_{m+1} + A_{m,m'} b_{m'} + \sum_{n=m+1}^{m'-1} A_{m,n} (b_n - b_{n+1}) =$$

$$= \sum_{n=m}^{m'-1} A_{m,n} (b_n - b_{n+1}) + A_{m,m'} b_{m'}$$

2 נוס

$z = x + iy$ נסו נסו לזכור, $\alpha < \beta$ נסו נסו נסו נסו

$$|e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}| \leq \frac{|z|}{x} (e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}) \quad \text{נסו (} x \neq 0, x, y \in \mathbb{R} \text{)}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{-tz} dt = -\frac{e^{-tz}}{z} \Big|_{\alpha}^{\beta} = (e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}) \cdot \frac{1}{z}$$

נסו

$$\Rightarrow |e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}| = |z| \left| \int_{\alpha}^{\beta} e^{-tz} dt \right| \leq |z| \int_{\alpha}^{\beta} |e^{-tz}| dt =$$

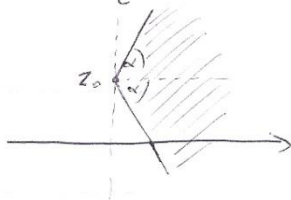
$$= |z| \int_{\alpha}^{\beta} e^{-t \operatorname{Re}(z)} dt = |z| \int_{\alpha}^{\beta} e^{-tx} dt = |z| \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}$$

נסו

z_0 נסו נסו נסו $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ נסו נסו נסו נסו
נסו נסו נסו נסו נסו נסו נסו נסו נסו נסו

$$\{z_0\} \cup \{\operatorname{Re}(z) > \operatorname{Re}(z_0)\} \cap \{z \mid |\operatorname{Arg}(z - z_0)| \leq \alpha\}$$

$$, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad \text{נסו}$$



$$a_n e^{-\lambda_n z} = \overbrace{(a_n e^{-\lambda_n z_0})}^{a'_n} \cdot e^{-\lambda_n (z-z_0)} = \underbrace{a'_n}_{\neq 0} e^{-\lambda_n z'} \quad \text{גורם}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a'_n e^{-\lambda_n z'} \quad z'=0 \text{ נותן סדרה של מספרים מרוכבים } \sum_{n=1}^{\infty} a'_n$$

$|\sum_{n=m}^{m'} a'_n| < \varepsilon \quad m' > m \geq N \quad \text{כאשר } \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \text{ מתכנס}$

$\lambda_n = e^{-\lambda_n z'} \quad \int_{\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \cdot f \quad \text{לפי משפט פארה}$

$$|\sum_{n=m}^{m'} a'_n \lambda_n| = |\sum_{n=m}^{m'-1} A_{m,n} (\lambda_n - \lambda_{n+1}) + A_{m,m'} \lambda_{m'}| \leq \sum_{n=m}^{m'-1} |A_{m,n}| |\lambda_n - \lambda_{n+1}| + |A_{m,m'}| |\lambda_{m'}|$$

$$\leq \sum_{n=m}^{m'} |A_{m,n}| |\lambda_n - \lambda_{n+1}| + |A_{m,m'}| |\lambda_{m'}| \leq$$

$\lambda_N > 0$ נבחר $m' > m \geq N$

$$\leq \varepsilon \left(\sum_{n=m}^{m'-1} |e^{-\lambda_n z'} - e^{-\lambda_{n+1} z'}| + |e^{-\lambda_{m'} z'}| \right) \leq$$

$$\leq \varepsilon \left(\frac{|z|}{x} \sum_{n=m}^{m'-1} (e^{-\lambda_n x} - e^{-\lambda_{n+1} x}) + e^{-\lambda_{m'} x} \right) \leq$$

$k = \frac{1}{\cos \alpha} > 1, \cos \theta \geq \cos \alpha \quad \text{כאשר } \frac{|z|}{x} = \frac{1}{\cos \theta}, x = r \cos \theta \leq 1, z = r e^{i\theta} \quad \text{כאשר}$

$$\leq \varepsilon \left(\frac{1}{\cos \alpha} \sum_{n=m}^{m'-1} (e^{-\lambda_n x} - e^{-\lambda_{n+1} x}) + e^{-\lambda_{m'} x} \right) = \varepsilon (k(e^{-\lambda_m x} - e^{-\lambda_{m'} x}) + e^{-\lambda_{m'} x})$$

$$< \varepsilon (k+1)$$

לכן

משפט 19.4

יהי $\mathcal{U}$ קולומה $\{f_n(z)\}$ של פונקציות אנליטיות בנקודה z_0 ויהי $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$ $\mathcal{U}$ - קולומה של הפונקציה $f(z)$

$k \in \mathcal{U}$ נגדית לנגזרת של $f(z)$ בנקודה z_0 ויהי $f'(z)$ הנגזרת של $f(z)$ בנקודה z_0

$f'(z)$ - $\mathcal{U}$ - קולומה של $\{f'(z)\}$

ע"כ $\{f'(z)\}, k \in \mathcal{U}$ נגדית לנגזרת של $f(z)$ בנקודה z_0

לפיכך

מתוך אי-פונקציות אנליטיות $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ מתבטא מקומות U ,
 ובג"ש בכל קבוצה סגורה ומסוגרת U .
 אם $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ אנליטית ב- U , $(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z))' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(z)$;
 מתבטא בג"ש בכל קבוצה סגורה ומסוגרת ב- U .

משקנה

מתוך אי-דיונאל $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ מתבטא במקומות z_0 .
 האי-מתבטא בתצ' הישור $\{Re(z) < Re(z_0)\}$ ואי-זכיר
 עם פונקציה אנליטית, יותר על כן מתן לטור איברי-איברי,

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}\right)^{(k)} = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n^k e^{-\lambda_n z}$$

משקנה

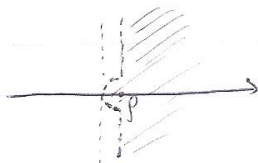
מתוך אי-דיונאל, המתבטא לטור בקצה אחד, שיש גם ישור בתור
 מקסימלי $Re(z) < x_0$ שבו האי-מתבטא, וקבוצת ההתבטאות
 שלו מוגדרת בתצ' הישור הסגור $Re(z) \geq x_0$.

דוגמה: טורי: $x_0 = \inf \{Re(z) \mid z \text{ האי-מתבטא ב-} z\}$
 (בה מוגדר כי מתן שהקבוצה אינה ריקה).

י"י z כן $Re(z) < x_0$, שיש אי-זכירות $\inf$ ק"י z_1
 כך $Re(z_1) < Re(z_2) < x_0$ ואם $Re(z_2) < x_0$ שבו מתבטא ב- z_2 .
 לפי המשקנה המוגדרת, האי-מתבטא ב- z .
 לפי יוצגות x_0 , האי-מתבטא אינו מתבטא בכל z כן $Re(z) < x_0$.

משפט

מתוך אי-דיונאל $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ עם מקומות $a_n \neq 0$,
 מתוך כי האי-מתבטא בתצ' הישור $Re(z) < \rho$, שיש כי ρ ,
 בפונקציה אנליטית בתצ' הישור $Re(z) < \rho$, יש השבב אנליטית
 ρ , שיש $\epsilon > 0$ כך שהאי-מתבטא בתצ' הישור $Re(z) < \rho - \epsilon$.



דוגמה

נניח שיש לנו $a_n e^{-\lambda_n z} = a_n e^{-\lambda_n p} e^{-\lambda_n (z-p)}$ נניח $p=0$ נניח $z' = (z-p)$, $a'_n = a_n e^{-\lambda_n p}$

אם λ_n אינו שווה ל-0, אז $\psi(z)$ הוא פונקציה אנליטית ב- $z=0$.

$\text{Re}(z) > 0$ אז $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$

אנליטית $\psi(z)$ $|z-1| < 1+2\epsilon$ נניח $0 < \epsilon < 1$ אז $z \in D(1, 1+2\epsilon)$

$\psi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\psi^{(j)}(1)}{j!} (z-1)^j$ נניח $\psi^{(j)}(1) = f^{(j)}(1)$

$\Rightarrow \psi^{(j)}(1) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n^j e^{-\lambda_n (1-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n^j$

$z = -\epsilon$ נניח

$\psi(-\epsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\psi^{(j)}(1)}{j!} (-\epsilon-1)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \lambda_n^j}{j!} e^{-\lambda_n} (-1+\epsilon)^j =$

נניח λ_n אינו שווה ל-0, אז $\psi(z)$ הוא פונקציה אנליטית ב- $z=0$.

$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n} \frac{[\lambda_n (-1+\epsilon)]^j}{j!} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{[\lambda_n (-1+\epsilon)]^j}{j!} =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n} e^{\lambda_n (-1+\epsilon)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n (1-\epsilon)}$

אם λ_n אינו שווה ל-0, אז $\psi(z)$ הוא פונקציה אנליטית ב- $z=0$. $\text{Re}(z) > -\epsilon$ אז $\psi(z)$ הוא פונקציה אנליטית ב- $z=0$.

משפט

אם $\{a_n\}$ היא סדרה של מספרים ממשיים, אז $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z}$ מתכנס ב- $\text{Re}(z) > 1$ ופונקציה אנליטית ב- $\text{Re}(z) > 1$.

נניח $|a_n| < M$ אז $|a_n| \leq M$

$\left| \frac{a_n}{n^z} \right| = \frac{|a_n|}{n^{\text{Re}(z)}} \leq \frac{M}{n^x}$

אם $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ מתכנס, אז $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_n}{n^z} \right|$ מתכנס. $x > 1$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ מתכנס. $\text{Re}(z) > 1$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ מתכנס.

משפט

אם $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \zeta(z)$ אז $\zeta(z)$ היא פונקציה אנליטית ב- $\text{Re}(z) > 1$.

נניח כי $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ סדרה סכימה $(A_{m,m'} = \sum_{n=m}^{m'} a_n)$

אז $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2}$ מתכנס בהכרח $\text{Re}(z) > 0$

$$\left| \sum_{n=m}^{m'} \frac{a_n}{n^2} \right| = \left| \sum_{n=m}^{m'-1} A_{m,n} (b_n - b_{n+1}) + A_{m,m'} b_{m'} \right| \leq \quad \text{כוכבה: } \int_{b_n}^{b_{n+1}} \frac{1}{x^2} dx \quad (b_n = \frac{1}{n^2})$$

$$\leq \sum_{n=m}^{m'-1} |A_{m,n}| \left| \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right| + |A_{m,m'}| \frac{1}{(m')^2} \leq$$

אם נניח כי $0 < M$ כך ש $|A_{m,m'}| \leq M$ לכל $m, m' \in \mathbb{N}$

$$\leq M \left(\sum_{n=m}^{m'-1} \left| \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right| + \frac{1}{(m')^2} \right) = M \left(\sum_{n=m}^{m'-1} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) + \frac{1}{m'^2} \right) =$$

כלומר $z = x > 0$

$$= M \frac{1}{m^x} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

נכון לזו דיווח $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2}$ מתכנס בהכרח $\text{Re}(z) > 0$ וכן
נכון לכל $x > 0$ מתכנס $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ בהכרח $\text{Re}(z) > 0$

קבעו $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ פונקציה כזו $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$ לכל $m, n \in \mathbb{N}$ פונקציה מרובעת

אז נניח

$$f(n) = \phi(n) \quad (1)$$

$$f(n) = n \quad (2)$$

$$(3) \text{ אם } f \text{ כפול, אז } \sigma_f(n) = \sum_{d|n} f(d)$$

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d \text{ לכל } n$$

נניח כי $f(n)$ פונקציה כפולה וחסומה, אז $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^2}$ מתכנס בהכרח f - זכוכית $\text{Re}(z) > 0$

האסטריות $S = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ קבוצה סופית של מספרים ראשוניים

הכפולים המורכבים מ- S והחסומים $N(S)$ קבוצה חסומה S - f קבוצה סופית של מספרים ראשוניים

$$\sum_{n \in N(S)} \frac{f(n)}{n^s} = \sum_{k_1, \dots, k_r \geq 0} \frac{f(p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r})}{p_1^{k_1 s} \dots p_r^{k_r s}} =$$

$$= \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{f(p_1^{k_1})}{p_1^{k_1 s}} \right) \dots \left(\sum_{k_r=0}^{\infty} \frac{f(p_r^{k_r})}{p_r^{k_r s}} \right)$$

יש גם $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i = P$ כל $p \in P$ נמצא ב- S_i עבור i מספיק גדול.

(לפי ההגדרה של φ) $\varphi_j(s) = \sum_{n \in N(S_j)} \frac{f(n)}{n^s}$ / נוס

$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ / נוס

נראה: $\varphi_j(s) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \varphi(s)$ (לפי ההגדרה של φ)
 (לפי ההגדרה של φ_j) $\varphi_j^{(k)}(s) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \varphi^{(k)}(s)$ (לפי ההגדרה של φ_j)

נראה: $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|f(n)|}{n^s} < \varepsilon$ לכל N מספיק גדול, $0 < \varepsilon < 1$, $s \in \mathbb{C}$.

יש L מספיק גדול, כך ש- $S_L = P$ לכל $p \in P$.
 לכל $j \geq L$, $2, 3, \dots, N$.

$$|\varphi(s) - \varphi_j(s)| \leq \left| \varphi(s) - \sum_{n=1}^N \frac{f(n)}{n^s} \right| + \left| \varphi_j(s) - \sum_{n=1}^N \frac{f(n)}{n^s} \right| \leq$$

$$\leq \varepsilon + \left| \sum_{n \in N(S_j)} \frac{f(n)}{n^s} \right| \leq \varepsilon + \sum_{n \in N(S_j)} \frac{|f(n)|}{n^s} \leq 2\varepsilon$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \lim_{l \rightarrow \infty} \prod_{p \in S_l} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(p^k)}{p^{ks}} \right)$$

לפי ההגדרה