24.5.10

# שיעור 11

**טענה:** נתונים שני מרחבים ריבועיים לא מנוונים $(V',Q')$, $(V,Q)$. נניח כי $(U,Q|_U)$ הוא תת מרחב מנוון של $(V,Q)$ (כלומר $rad(U)\neq 0$). נניח כי $s:(U,Q|_U)\to(V',Q')$ הוא הומומורפיזם חח"ע (שיכון). אזי יש תת מרחב $U\subseteq U_1\subseteq V$, כך ש $\dim U_1=\dim U+1$, והרחבה של $s$ להומומורפיזם חח"ע $s_1:(U_1,Q|_{U_1})\to(V',Q')$.

**הוכחה:** נבחר $0\neq u_0\in rad(U)$. נבחר $f\in U^*$ כך ש $f(u_0)=1$.
כיוון ש-$Q$ לא מנוונת, יש $v_0\in V$ כך ש $f(u)=\langle u,v_0\rangle$ ל-$u\in U$.
אפשר להניח כי $v_0$ הוא איזוטרופי ($Q(v_0)=0$), כי אחרת ניקח: $\tilde{v}_0=v_0-\frac{1}{2}\langle v_0,v_0\rangle u_0$

$$\langle u,\tilde{v}_0\rangle=\langle u,v_0\rangle-\frac{1}{2}\langle v_0,v_0\rangle\langle u,v_0\rangle=\langle u,v_0\rangle=f(u)$$

$$Q(\tilde{v}_0)=\langle\tilde{v}_0,\tilde{v}_0\rangle=\langle v_0,v_0\rangle-\langle v_0,v_0\rangle\underset{f(u_0)=1}{\underset{\shortparallel}{\langle v_0,u_0\rangle}}+\frac{1}{4}\langle v_0,v_0\rangle^2\underset{0}{\underset{\shortparallel}{\langle u_0,u_0\rangle}}=$$
$$=\langle v_0,v_0\rangle-\langle v_0,v_0\rangle=0$$

לכן נניח כי $v_0$ איזוטרופי. נסמן: $U_1=U\oplus kv_0$
(אכן $v_0\notin U$, כי $\langle u_0,v_0\rangle=1$; ואם $v_0\in U$ אז היינו מקבלים $\langle u_0,v_0\rangle=0$, שהרי $u_0\in rad(U)$)

נחזור על הבניה ל $U'=s(U)$ (ברור כי $rad U'\neq 0$
$rad U'\ni u_0=s(u_0)\neq 0$.

$f'=f\circ s^{-1}$ $\quad (f'(u_0')=(f\circ s^{-1})(s(u_0))=f(u_0)=1)$

כיוון ש-$Q'$ לא מנוונת, יש $V'\ni v_0'$, שאפשר לבחור אותו איזוטרופי ($Q'(v_0')=0$) כך ש: $f'(u')=\langle u',v_0'\rangle'$, לכל $u'\in U'$.

נגדיר $U_1'=U'\oplus kv_0'$.

נגדיר $s_1:U_1\to U_1'$, $s_1(u+\alpha v_0)=s(u)+\alpha v_0'$

ברור כי $s_1$ היא העתקה לינארית חח"ע (על $U_1'$)

$u,\tilde{u}\in U,\ \alpha,\beta\in k$, $\langle s_1(u+\alpha v_0),s_1(\tilde{u}+\beta v_0)\rangle'=\langle s(u)+\alpha v_0',\ s(\tilde{u})+\beta v_0'\rangle'=$

$$=\underset{\langle u,\tilde{u}\rangle}{\underset{\shortparallel}{\langle s(u),s(\tilde{u})\rangle'}}+\beta\underset{\langle u,v_0\rangle}{\underset{\shortparallel}{\underset{f(u)}{\underset{\shortparallel}{\underset{f'(s(u))}{\underset{\shortparallel}{\langle s(u),v_0'\rangle'}}}}}}+\alpha\underset{\langle\tilde{u},v_0\rangle}{\underset{\shortparallel}{\underset{f(\tilde{u})}{\underset{\shortparallel}{\underbrace{\langle s(\tilde{u}),v_0'\rangle'}_{f'(s(\tilde{u}))}}}}}+\alpha\beta\underset{0}{\underset{\shortparallel}{\langle v_0',v_0'\rangle'}}$$

$$= \langle u,\tilde u\rangle + \alpha\langle u,v_0\rangle + \beta\langle \tilde u,v_0\rangle = \langle u+\alpha v_0, \tilde u+\beta v_0\rangle$$

## משפט Witt

נתונים שני מרחבים ריבועיים לא מנוונים איזומטריים $(V',Q')$, $(V,Q)$.
נניח כי נתון שיכון $S:(U,Q|_U)\to(V',Q')$ של תת מרחב ריבועי $(U,Q|_U)$ של $(V,Q)$, אז יש ל-$S$ הרחבה לאיזומטריה מ-$(V,Q)$ ל-$(V',Q')$.

<u>הוכחה:</u> אם $U$ מנוון נקח הרחבה $S_1$ ל-$U_1$ כמו בהרצאה. אם $U_1$ מנוון, נשתמש בהרצאה שוב וכו'. בשלב שלב נגיע לתת מרחב לא מנוון $U\subseteq\tilde U\subseteq V$ כי $V$ לא מנוון. לכן אפשר להניח כי $(U,Q|_U)$ לא מנוון.
נבחר איזומטריה $T:(V',Q')\to(V,Q)$ ונרכיב עם $S$.
$T\circ S:(U,Q|_U)\to(V,Q)$.
אם נראה קיום הרחבה לאיזומטריה $\sigma:(V,Q)\to(V,Q)$ של $T\circ S$, אז $T^{-1}\circ\sigma$, נקבל את ההרחבה הדרושה של $S$. לכן אפשר להניח $(V',Q')=(V,Q)$. ההוכחה באינדוקציה על $\dim U$.

<u>$\dim U=1$:</u> $U=ku_0$; $Q(u_0)\neq 0$ (כי $U$ לא מנוון).

$S(u_0)=v_0$ $\quad\langle v_0,v_0\rangle=\langle u_0,u_0\rangle$

אחד מ-$u_0\pm v_0$ הוא לא איזוטרופי; $(\varepsilon=\pm1)$

$$\langle u_0+\varepsilon v_0, u_0+\varepsilon v_0\rangle = \langle u_0,v_0\rangle + 2\varepsilon\langle u_0,v_0\rangle + \langle v_0,v_0\rangle =$$
$$= 2(\langle u_0,u_0\rangle \pm \langle u_0,v_0\rangle) \underset{\uparrow}{=} 0 \;\Rightarrow\; \langle u_0,v_0\rangle = 0 \leftarrow \text{לא נכון}$$

אם שניהם ע"י חיבור המשוואות

יהי $\varepsilon=\pm1$ כך ש: $w_0=u_0+\varepsilon v_0$ לא איזוטרופי. משלים לו:
$(kw_0)^\perp=H$, $kw_0\to$ לא מנוון.
כיוון ש-$Q$ לא מנוונת, גם $H$ לא מנוון (כי $kw_0$ לא מנוון), ולכן:
$V=H\hat\oplus kw_0$

נשים לב ש: $u_0-\varepsilon v_0\in H$:

$$\langle u_0-\varepsilon v_0, u_0+\varepsilon v_0\rangle = \langle u_0,u_0\rangle - \varepsilon^2\langle v_0,v_0\rangle = \langle u_0,u_0\rangle - \langle v_0,v_0\rangle = 0$$

נגדיר העתקה לינארית חח"ע $\sigma:V\to V$ כך:
ע"י $\sigma|_H=id_H$, $\sigma(w_0)=-w_0$,

$$\langle\sigma(h+\alpha w_0),\sigma(h'+\beta w_0)\rangle = \langle h-\alpha w_0, h'-\beta w_0\rangle = \langle h,h'\rangle+\alpha\beta\langle w_0,w_0\rangle = \langle h+\alpha w_0, h'+\beta w_0\rangle$$

$$\begin{cases}\sigma(u_0+\varepsilon v_0)=-u-\varepsilon v_0\\ \sigma(u_0-\varepsilon v_0)=u_0-\varepsilon v_0 & (\text{כי } u_0-\varepsilon v_0\in H)\end{cases}+$$

$$2\sigma(u_0)=-2\varepsilon v_0$$

$$-\varepsilon\sigma(u_0)=v_0=s(u_0)$$

לכן $-\varepsilon\sigma$ הוא איזומטריה של $(V,Q)$ שמרחיבה את $s$.

נניח כי $(U,Q|_U)$ תת מרחב לא מנוון של $V$, $\dim U>1$, ונניח שהמשפט נכון לכל תת מרחב לא מנוון ממימד $<\dim U$.
נפרק (בעזרת מוכן) $U=U_1\hat{\oplus}U_2$ לסכום ישר אורתוגונלי של שני תתי מרחבים לא מנוונים (למשל, $U_2=ku_2$, כך ש $Q(u_2)\neq 0$ ו $U_1=u_2^\perp\cap U$).
נסמן $s_1=s|_{U_1}$. מהאינדוקציה, יש ל-$s_1$ הרחבה לאיזומטריה $\sigma_1$ של $(V,Q)$ על עצמו. נסמן $s'=\sigma_1^{-1}\circ s$ $(s':(U,Q|_U)\to(V,Q))$
נשים לב לכך ש-$s'|_{U_1}=id|_{U_1}$. אם נראה של-$s'$ יש הרחבה לאיזומטריה $\sigma$ של $(V,Q)$ אזי $\sigma_1\circ\sigma$ הוא איזומטריה של $(V,Q)$ שמרחיבה את $s$.
לכן אפשר להניח כי $s|_{U_1}=id_{U_1}$. לכל $u_2\in U_2$, $u_1\in U_1$:

$$\langle u_1,s(u_2)\rangle=\langle s(u_1),s(u_2)\rangle=\langle u_1,u_2\rangle=0$$

לכן $s(U_2)\subseteq U_1^\perp$.

נסמן $V_1=U_1^\perp$. כיוון ש-$U_1$ לא מנוון, גם $V_1$ לא מנוון, ומתקיים:
$V=V_1\hat{\oplus}U_1$, $s(U_2)\subseteq V$. נסמן $s_2=s|_{U_2}$, אז
$s_2:(U_2,Q|_{U_2})\to(V_1,Q|_{V_1})$ הוא שיכון ממרחב לא מנוון למרחב לא מנוון;
כמו כן, $\dim U_2<\dim U$, מהנחת האינדוקציה, יש ל-$s_2$ הרחבה לאיזומטריה
$\sigma_2$ של $(V_1,Q|_{V_1})$. נגדיר העתקה לינארית חח"ע $\sigma:V\to V$
ע"י $\sigma|_{V_1}=\sigma_2$, $\sigma|_{U_1}=id_{U_1}$. $\sigma$ מרחיבה את $s$:

$$\sigma(\underset{\in U_1}{u_1}+\underset{\in U_2}{u_2})=u_1+\sigma_2(u_2)=u_1+s(u_2)=s(u_1+u_2)$$

$$\langle\sigma(v_1+u_1),\sigma(v_1'+u_1')\rangle=\langle\sigma_2(v_1)+u_1,\sigma_2(v_1')+u_1'\rangle=$$

$$=\langle\sigma_2(v_1),\sigma_2(v_1')\rangle+\langle u_1,u_1'\rangle=\langle v_1+u_1,v_1'+u_1'\rangle$$

<u>מסקנה</u>: יהי $(V,Q)$ מרחב ריבועי לא מנוון. נניח כי $(U,Q|_U)\cong(W,Q|_W)$
הם איזומטריים (מנוונים או לא). אז גם $(U^\perp,Q|_{U^\perp})\cong(W^\perp,Q|_{W^\perp})$
איזומטריים.

<u>הוכחה</u>: נניח כי $s:(U,Q|_U)\to(W,Q|_W)$ הוא איזומורפיזם. ממשפט Witt יש ל-$s$ הרחבה לאוטומורפיזם $\sigma$ של $(V,Q)$. נראה כי $\sigma(U^\perp)=W^\perp$ ואז $\sigma|_{U^\perp}$ יתן איזומורפיזם $(U^\perp,Q|_{U^\perp})\to(W^\perp,Q|_{W^\perp})$.

$$v\in U^\perp \iff \langle v,u\rangle=0\ \forall u\in U \iff \langle\sigma(v),\sigma(u)\rangle=0\ \forall u\in U$$
$$\iff \sigma(v)\in\sigma(U)^\perp$$

אבל $\sigma|_U=s$, ולכן $\sigma(U)=s(U)=W$. לכן:
$v\in U^\perp \iff \sigma(v)\in W^\perp$. לכן $\sigma(U^\perp)=\sigma(U)^\perp=W^\perp$.

## <u>בקואורדינטות</u>

ניקח $V=k^n$ (מרחב השורות). נזכור שתבנית ריבועית לפי הבסיס הסטנדרטי = פולינום הומוגני ממעלה 2 ב-$x=(x_1,\dots,x_n)$ ($Q(tx)=t^2Q(x)$)
$Q(x)=xAx^t$ ($A^t=A\in M_n(k)$).

המרחבים $(k^n,Q)$, $(k^n,Q')$ איזומורפיים אם יש העתקה לינארית חח"ע ועל $T:k^n\to k^n$ כך ש $Q'(T(x))=Q(x)$ $\forall x\in k^n$.

נניח כי $Q'$ מיוצגת ע"י המטריצה הסימטרית $A'$ וגם נניח כי $T$ מיוצגת ע"י המטריצה ההפיכה $R$: $T(x)=xR$ $\forall x$

$Q'(x\cdot R)=Q(x) \iff xRA'R^tx^t=xAx^t \iff RA'R^t=A$ (חופפות).

נאמר כי $Q$ שקולה ל-$Q'$ (נסמן $Q\sim Q'$), כנ"ל לתבניות הסימטריות המתאימות אם $(k^n,Q)$, $(k^n,Q')$ איזומורפיים. זה שקול לחפיפה של המטריצות הסימטריות המתאימות, זה שקול לחפיפה של כל שתי מטריצות מייצגות מתאימות.

## <u>סכום ישר של תבניות ריבועיות</u>

נתונות שתי תבניות ריבועיות $Q(x_1,\dots,x_n)$, $f(x_{n+1},\dots,x_{n+m})$.
$$(Q\oplus f)(x_1,\dots,x_{n+m})=Q(x_1,\dots,x_n)+f(x_{n+1},\dots,x_{n+m})$$
$$(k^n,Q),\ (k^m,f)\longrightarrow(k^{n+m},Q\oplus f)$$

<u>משפט</u>: נתונות שתי תבניות ריבועיות לא מנוונות מעל $k$ ($\mathrm{char}\,k\neq 2$?): $Q$, $Q'$, נניח כי $Q\sim f\oplus g$, $Q'\sim f'\oplus g'$. נניח כי $Q\sim Q'$, $f\sim f'$, אז $g\sim g'$.

**הוכחה:** יהי $T:(k^n,Q)\to(k^n,Q')$ איזומטריה. יש פירוק
$k^n=U\hat{\oplus}U'$ כך שאם נבחר בסיסים ל-$U$ ול-$U'$, אז לפי
בסיסים אלה, $Q|_U$ נתונה ע"י $f$, $Q|_{U'}$ נתונה ע"י $g$;

$(k^{n_1},f)\sim(U,Q|_U)\sim(T(U),Q'|_{T(U)})$. $k^n=T(U)\hat{\oplus}T(U')$

אבל נתון $(k^{n_1},f')\sim(k^{n_1},f)$ ($\dim U=n_1$, $\dim U'=n_2$).
בדיוק כמו במסקנה הקודמת, נסיק כי $U^\perp\sim T(U)^\perp$.

$$T(U')=T(U)^\perp,\ U^\perp=U' \Rightarrow (T(U'),Q'|_{T(U')})\sim(U',Q|_{U'})$$

$$(k^{n_2},g')\sim(k^{n_2},g).$$ מש"ל

נוח לסמן! $f\ominus g=f\oplus(-g)$

**הגדרה**

יהי $a\in k$, נאמר כי התבנית הריבועית $f$ מייצגת את $a$ אם יש $0\neq v\in k^n$ כך ש $f(v)=a$. (אם $a\neq 0$ אז לא צריך $v\neq 0$).

ראינו שאם $f$ מייצגת אפס, אז $f$ מייצגת את כל איברי $k$ (כי ראינו $f\sim H_2\oplus f'$), $H_2(x,y)=2xy=(x,y)\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

**טענה:** תהי $Q$ תבנית ריבועית לא מנוונת על $k^{n-1}$, ויהי $a\in k^*$.
הטענות הבאות שקולות:

א: $Q$ מייצגת את $a$.

ב: יש תבנית ריבועית ב-$n-2$ משתנים $f$ כך ש $Q\sim f\oplus az^2$

ג: $Q\ominus az^2$ מייצגת אפס.

**הוכחה:**

**א⇒ב:** יהי $0\neq v_0\in k^{n-1}$, כך ש $Q(v_0)=a$. נסמן $U=(kv_0)^\perp$ (בתוך $k^{n-1}$).
כיוון ש-$v_0$ לא איזוטרופי, אז $kv_0$ לא מנוון וגם $U$, ולכן $k^{n-1}=U\hat{\oplus}kv_0$.
נבחר בסיס ל-$U$: $\{u_1,\dots,u_{n-2}\}$ ונסמן ב-$f$ את התבנית הריבועית על $k^{n-2}$ המתקבלת מ-$Q|_U$, לפי הבסיס. אז לפי הבסיס $\{u_1,\dots,u_{n-2},v_0\}$
של $k^{n-1}$, $Q$ נראית כך: $(x_1,\dots,x_{n-1})\longmapsto f(x_1,\dots,x_{n-2})+ax_{n-1}^2$

**ב⇒א:** $f\oplus az^2$ מייצגת את $a$ כי נציב $(0,\dots,0,1)$, לכן
$Q$ מייצגת $a$.

א <= ב: נניח כי $Q(v_0)=a$, $0\neq v_0\in k^{n-1}$, $Q(v_0)-a\mathbf{1}^2=0$

נגדיר $f(x_1,\dots,x_n)=Q(x_1,\dots,x_{n-1})-ax_n^2$. לכן $f(v_0,1)=0$

$$\overset{\shortparallel}{.\ Q\ominus az^2}$$

ב <= א: נניח כי יש $(x_1,\dots,x_n)\neq(0,\dots,0)$ כך ש:

$$Q(x_1\dots x_{n-1})-ax_n^2=0$$

אם $x_n\neq 0$, אז $a=\frac{1}{x_n^2}Q(x_1\dots x_{n-1})$, $\Leftarrow$ $a=Q\left(\frac{x_1}{x_n},\dots,\frac{x_{n-1}}{x_n}\right)$.

לכן $Q$ מייצגת $a$.

אם $x_n=0$, אז $(x_1\dots x_{n-1})\neq(0,\dots,0)$ ולפיכך $Q$ מייצגת אפס,

ולכן $Q$ מייצגת ~~[illegible]~~ כל איבר ובפרט $a$.

למה: תהיינה $h,g$ תבניות ריבועיות לא מנוונות ב-$n,m$ משתנים בהתאמה. נסמן $f=g\oplus h$. הדברים הבאים שקולים:

א: $f$ מייצגת אפס

ב: יש $a\in k^*$ המיוצג ע"י $g$ וגם ע"י $h$.

ג: יש $a\in k^*$ כך ש $g\ominus az^2$ ו $h\ominus az^2$ מייצגות אפס.

הוכחה: השקילות ב $\Leftrightarrow$ ג נובעת מהלמה הקודמת.

א <= ב: יש $(0,0)\neq(u_0,v_0)\in k^n\times k^m$ כך ש $g(u_0)-h(v_0)=0$.

נניח $g(u_0)=h(v_0)=a$. ~~[illegible]~~ אם $a\neq 0$, אז $a$ מיוצג ע"י $g$ וע"י $h$. אם $a=0$, נניח בלי הגבלת הכלליות כי $u_0\neq 0$, אז $g$ מייצגת אפס, ולכן מייצגת כל איבר. נבחר $b\in k^*$ המיוצג ע"י $h$: $h(v_0')=b$, יש $u_0'$ כך ש $g(u_0')=b$: $b\in k^*$ מיוצג ע"י שתי התבניות. מש"ל

$k=\mathbb{F}_q$ - השדה הסופי בגודל $q=p^n$ ($p$ ראשוני).

למה: ① כל תבנית ריבועית מדרגה $\geq 2$, מעל $k$, מייצגת את כל איברי $k^*$.

② " " " $\geq 3$, " , מייצגת את כל איברי $k$.

הוכחה: ② מסקנת Chevalley ראינו כי כל תבנית ריבועית לא מנוונת מעל $k^n$ ($n\geq 3$) מייצגת אפס, ולכן מייצגת את כל איברי $\mathbb{F}_q$.

① תהי $f$ תבנית ריבועית לא מנוונת מעל $k^2$. $f$ מייצגת את $a\in k^*$ $\Longleftrightarrow$ $\underbrace{f\ominus az^2}_{\text{תבנית ב-3 משתנים}}$ מייצגת אפס.

ולכן מייצגת אפס.

## המיון של תבניות ~~[illegible]~~ ריבועיות לאי מנוונות ב-n משתנים

### מעל $\mathbb{F}_q$

שתי תבניות כאלה הן שקולות $\iff$ הן בעלות אותה דיסקרימיננטה.
יתר על כן, נקבע נציג $\rho \neq 1$ ל- $\mathbb{F}_q^*/(\mathbb{F}_q^*)^2$ (בה שני איברים).

$$\mathbb{F}_q^* = (\mathbb{F}_q^*)^2 \cup \rho(\mathbb{F}_q^*)^2 \quad , \quad \rho \notin (\mathbb{F}_q^*)^2$$

כל תבנית כנ"ל שקולה לאחת מהתבניות:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

או

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 + \rho x_n^2$$

<u>הוכחה:</u> תהי $Q$ תבנית ריבועית לא מנוונת על $k^n$.
אם $n=1$ $Q(x)=ax^2$. מחלקות השקילות נקבעות לפי $a(\mathbb{F}_q^*)^2$.
אם $n \geq 2$, אז $Q$ מייצגת כל איבר $\neq 0$ (ובפרט 1).
אז $Q \sim f \oplus 1\cdot x_1^2$ כאשר $f$ ב- $n-1$ משתנים.
באינדוקציה $f$ שקולה ל- $x_2^2+\dots+x_n^2$ או ל- $x_2^2+\dots+x_{n-1}^2+\rho x_n^2$.

---

p ראשוני. <u>$k=\mathbb{Q}_p$</u>; $f$ תבנית ריבועית לא מנוונת על $V=k^n$
נבחר בסיס <u>אורתוגונלי</u> $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ ל- $V$. נסמן $f(v_i)=a_i\in k^*$
ביחס לבסיס זה $f$ נתונה ע"י: $\sum_{i=1}^n a_i x_i^2$

$$disc(f)=\det\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} = a_1\cdots a_n \ (\mathrm{mod}\ (k^*)^2)$$

נגדיר $\varepsilon(B)=\prod_{i<j}(a_i,a_j)$ (ל- $n=1$ $\varepsilon(B)=1$).

<u>משפט:</u> $\varepsilon(B)$ אינו תלוי בבחירת $B$. הוכחה: באינדוקציה. ל- $n=1$ אין מה להוכיח.
<u>$n=2$</u>: $\varepsilon(B)=(a_1,a_2)$. $\varepsilon(B)=1 \iff z^2-a_1x^2-a_2y^2$ מייצגת אפס $\iff a_1x^2+a_2y^2$ מייצגת 1 $\iff$ $f$ מייצגת 1 (תנאי שלא תלוי ב- $B$).
<u>$n\geq 3$</u>: יהי $B'$ בסיס אורתוגונלי נוסף. אפשר להניח כי $B'$ קרוב ל- $B$ ($B\cap B'\neq\emptyset$)
כיוון שסמל הילברט סימטרי

לכל תמורה $\sigma$ $\prod_{i<j}(a_i, a_j) = \prod_{i<j}(a_{\sigma(i)}, a_{\sigma(j)})$

לכן אפשר להניח $B = \{v_1, \dots v_n\}$ , $B' = \{v_1, v_2', \dots v_n'\}$

$$\varepsilon(B) = \prod_{j>1}(a_1, a_j) \cdot \prod_{2\le i<j}(a_i, a_j) =$$

$$= (a_1, a_1^2 a_2 \cdots a_n) \cdot \prod_{2\le i<j}(a_i, a_j) =$$

$$= (a_1, a_1 disc(f)) \prod_{2\le i<j}(a_i, a_j)$$

$$\varepsilon(B') = (a_1, a_1 disc(f)) \prod_{2\le i<j}(a_i', a_j')$$

$\longrightarrow$ אינדוקציה.
על $\varepsilon$ המשויכת
ל $(k v_1)^\perp$
לכ' $\{v_2, \dots v_n\}$
$\{v_2', \dots v_n'\}$